BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXIII
C
42
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

EDUARDI CORSINI

EX CLER. REG.

SCHOLARUM PIARUM

INSTITUTIONES MATHEMATICÆ.

Digitized by Google

Ὡς ὅἷόντ' ἆρα μάλιστα προστακτέον ὅπως οἱ ἐν τῇ καλλίστῃ Πόλει σου, μηδενὶ τρόπῳ Γεωμετρίας ἀφέξονται. καὶ γὰρ τὰ πάρεργα αὐτοῦ οὐ σμικρά.

Πλάτων. Πολιτ. Ζ.

Quammaximè præcipiendum eſt, ut qui pulcherrimam hanc habitant Civitatem, nullo modo Geometriam ſpernant: nam & quæ præter ipſius propoſitum quodammodo eſſe videntur, haud exigua ſunt.

Plato VII. de Rep.

INSTITUTIONES MATHEMATICÆ

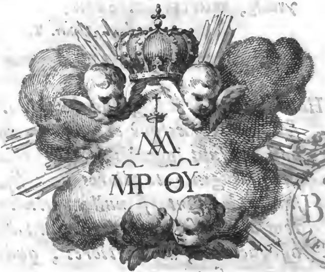
AD USUM

SCHOLARUM PIARUM

QUIBUS ILLUSTRIORA

EUCLIDIS, ARCHIMEDIS, APOLLONII,

Aliorumque Theoremata breviori, clariorique methodo demonſtrantur.



B. R. NEAPOLIS

FLORENTIÆ MDCCXXXI.
Typis Bernardi Paperini.

Sub Signo Palladis, & Herculis.
CUM APPROBATIONE.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

GEOMETRIS ADOLESCENTIBUS.

Etſi pro rei dignitate, ſive recepto jam more plura de Mathematicæ facultatis origine, partibus, praeſtantiâ, ac methodo, quâ vel a ceteris pertractata, vel adornata a me fuerit, paullo inferiùs praefari decreverim, juverit tamen aliqua vel obiter hìc admonere, ut clarior vobis, atque facilior aditus, Geometrae Adoleſcentes, ad haec elementa aperiatur, atque ut alacriùs etiam ad hoc ampliſſimae, praeſtantiſſimaeque diſciplinae ſtudium veſter animus incendatur.

Illud itaque in primis optandum maximè, curandumque eſt, ut illi, qui Geometricum pulverem erudiendus attigerit,

Magiſter contingat, & diligens, & expertus, qui ingenuo quodam amore de Tyronis eruditione ſollicitus omnia nitidè, clarè, diſtinctèque exponat, ac veluti ſpatium illud jucundè relegens, quod ipſe jampridem feliciter eſt emenſus, obſcuriora loca, & quae properanti moras injicere fortaſſe poſſent, obſervet; propoſito ſubinde Geometriae ſplendore torpentem, baeſitantemque Tyronis animum excitet, ac impellat; nec unquam illum ab inſtituto deflectere, aut ab ullis difficultatibus perturbari patiatur, donec Adoleſcentem ipſum hujus pulcherrimae facultatis amore incendi jam viderit. Ac praeclarè certè ſibi conſultum eſſe, & perquàm liberaliter is ſecum agi putabit, cui hoc duce Geometriae ſtudia ſic auſpicari contigerit; tantumque abeſt, ut hunc monere, hortari, vel excitare nunc velim, ut illi potiùs hanc ſortem mirificè gratuler, atque haec uberiùs, & commodiùs a Praeceptore ipſo praeſtari poſſe confidam, ac prorſus deſiderem. Quandoquidem tamen plurimos eſſe novi, quibus Praeceptor ejuſmodi minimè ſuppetat, & experimento ipſo jam didici plurimos etiam eſſe, qui facilè per ſe Mathematicas Inſtitutiones addiſcere perfectè poſſint, eos modò alloqui, ac pauca monere velim, quae ipſis quidem maximè neceſſaria, ce-

te-

teris autem utilia, atque jucunda fore non dubito.

Qui ergo ad Geometriae ſtudia animum converterit, ingenuo quodam, boneſtoque veritatis amore incenſus opiniones omnes, quas animo fortaſſe conceperit, ita exuat, vel paulliſper certè ſeponat, ut neque doctiſſimorum hominum authoritate, neque ſenſuum judicio, neque partium ſtudio, quibus in ceteris diſciplinarum generibus uti plerumque, vel abuti conſuevimus, moveri, vel inclinari ſe patiatur; ſed certò, conſtanterque apud ſe ſtatuat id unum in Geometricis rebus amplecti oportere, quod verum ſit; omnia verò refellere, quae clarè, invictè, diſtinctèque percipi, ſive probari non viderit.

Admirabilem deinde ſeriem rerum, veritatumque, quae in Geometriâ proponuntur, Axiomata, Definitiones, Poſtulata, Propoſitiones ipſas accuratè perpendat, neque priùs ad ulteriora temere progrediatur, quàm rite priora perceperit. Si quando tamen propoſitionem aliquam fortaſſe offenderit, quae ſemel, atque iterum lecta difficilior adhuc, & obſcurior videatur, non moleſtâ, ac pervicaci mentis contentione ſcrupulum, difficultatemque amovere conetur; ſed eam potiùs interim praetereat, ac veluti certam, demonſtratamque ſupponat, & ad

ſequentes liberè progrediatur, tum ad eam ipſam, quae omiſſa jam fuerat, revertatur: fieri ſiquidem plerumque ſolet, ut quae primo aſpectu difficilis, ac ferè inſuperabilis videbatur, in faciem aliam converſa, alterius, ut ita dixerim, luminis ope; praeſertim verò magis tranquillâ, pacatâque mentis acie ſpectata clarior ipſa per ſe ſe, atque nitidior effulgeat.

Quamvis etiam nativa rerum diſcendarum ſeries poſtulet, ut duodecim libri eodem prorſus ordine legantur, quo diſpoſiti ſunt, quemadmodum inferiùs demonſtrabitur, integrum tamen, liberumque eſt ſeriem illam aliquandiu negligere, vel perturbare; ut expoſitis nimirum Axiomatîs, tertius ſtatim, quartus, & quintus liber exponatur, tum primus, atque ſecundus, qui paullo obſcuriores videri meritò ſolent, adeantur, cùm illorum cognitio ab his duobus minimè pendeat.

Obſervanda erit inſuper in quovis libro propoſitionum ſeries, & ordo, quo demonſtratae jam fuerint, non ſolùm, ut illarum omnium connexio clariùs percipiatur, adeoque altiùs memoriae illae inhaereant, verùm etiam ut, cum in demonſtrandis aliis ſequentibus praecedentium aliqua in margine citari contigerit, ſtatim citatae illius propoſitionis uſus, & veritas appareat,

ne-

neque continuò cogatur diligens Tyro paginas evolvere, ſuſceptaeque propoſitionis demonſtrationem moleſtè perturbare, ut alterius citatae propoſitionis vim, & ſenſum inquirat. Id verò facili, nulloque negotio aſſequetur, ſi paullatim aſſueſcat tacitè ſubinde, dum otiatur, ejuſmodi propoſitionum ſeriem cogitare; brevi enim fiet, ut altè adeo propoſitionum numerus, & ordo memoriae defigatur, ut hic ab illâ unquam deleri, vel obliterari non poſſit.

Praeſtaret etiam propoſitiones ipſas alteri oſtendere, & quod in ceteris diſciplinis ſperari, ſive tentari vix poteſt, ubi propoſitiones aliquae, vel aliquis liber planè perceptus jam ſit, in iis Adoleſcentem alium erudire: incredibile eſt enim quàm haec aſſidua diſcendi ſimul, docendique exercitatio animum excitet, ingenii lumen accendat, & ſuavi illâ, jucundâque docendi voluptate vires inſpiret.

Illud inſuper maximè juverit, ut quae de figurâ tabulae inſcriptâ demonſtrata, probèque perſpecta jam fuerint, haec in aliâ majori, vel minori figurâ, ſive etiam, ſi id propoſitio ferat, in alio figurarum, vel magnitudinum genere demonſtrentur, ut clarius adhuc propoſitionis vis, & extenſio percipiatur, caſuſque omnes, quos eadem propoſitio fortaſſe complectitur, oſtendantur.

Omni

Omni denique virium conatu enitendum eſt, ne unquam animus deficiat; ſibique Geometrae Adoleſcentes quàm quod maximè perſuadeant nihil turpius eſſe, quàm animum deſpondere; quaerendique defatigationem, ut inquit Cicero, turpiſſimam eſſe, cum id, quod quaeritur, ſit pulcherrimum. Optandum ſanè foret, ut quae pulcherrima, atque utilia ſunt, facilia quoque, perſpicua, jucundiſſima, & clariſſima forent; verùm haec eſt maximarum rerum conditio, ut arduae, adeptuque difficiles ſunt; neque tanta futura ſit in nobis voluptas, & gloria, ſi abſque labore illae poſſint, & induſtriâ comparari.

Quodſi neque voluptas illa, neque eximia prorſus utilitas, quam Mathematicis diſciplinis ineſſe dicimus, ſtatim, ac dum primoribus labris illae attinguntur, percipiatur, neque prorſus appareat quis ex lineis, circuliſque fructus expectari unquam poſſit, non ideo tamen hæc contemnenda, quod temere plerique faciunt, vel remiſſiùs excolenda ſunt. Quemadmodum enim, qui primâ aetate varias characterum formas inviti prorſus edocentur, inſuavi illâ quidem, ac injucundâ exercitatione miſerè torquentur, ac prorſus ignorant quae, & quanta voluptas, qualiſque fructus ex tenui, & omnium inſuaviſſimâ

eru-

eruditione oriri unquam poſſit, ſed meritò tamen reprehenderentur, ſi rudem illam, ac primam doctrinae partem contemnerent; ita ferè vituperandi ſunt illi, qui cùm Mathematicae facultatis fructus, utilitatemque nondum percipiant, haec inutilia, & negligenda propemodum arbitrantur. Haec nimirum ſunt prima praeſtantiſſimarum diſciplinarum elementa, haec ampliſſimae Scientiae ſemina, haec denique ad maximarum, divinarumque rerum contemplationem aditus; & quemadmodum libri variis characteribus deſcribuntur, quos qui ignorat, res etiam, quae libris ejuſmodi continentur, ignoret neceſſe eſt, ita rerum natura, & admirabilis haec Univerſi compages, quam Sapiens ille Dei librum vocabat, Geometricis characteribus, lineis nimirum, & angulis conſcriptus eſt; ut optimè proinde dixerit Plato, Deum Geometriam exercere, vel, ut ait Proclus, Geometriae Praeſidem eſſe, quòd omnia in numero, pondere, & menſurâ ſapientiſſimè diſpoſuerit, & effectus omnes ad ſeveriores Staticae, & Mechanicae leges produxerit.

Sed ut illuſtriùs adhuc Mathematicae facultatis uſus appareat, atque haec quorundam opinio ab Adoleſcentium animis, ſi fortè iis inſederit, avellatur, hoc ceteras inter artes, & Geometriam ipſam diſcri-

men reperitur, quod illarum uſus, ac utilitas, cùm planè cognitae, comparataeque fuerint, acquiratur; verùm Geometria mirificè nos inſtruat, ac juvet interim quoque dum colitur. Cùm etenim in reliquis diſciplinarum generibus pauca admodum ſint, quae veluti certa, ac evidentia admitti poſſint, ſed omnia ferè dubia, incerta, ac falſa videantur, neque illarum certè veritas deprehendi poſſit, niſi cùm omnia accuratè perſpecta, & mutuò collata ſint; illarum ſanè utilitas, atque jucunditas, quae in veritatis amplexu conſiſtit, percipi non poteſt, niſi cùm quæſtiones omnes explicatae jam fuerint; Geometria verò, cùm veritatem certò ſemper, & conſtantiſſimè intueatur, nec unquam ab opinione, vel errore abripiatur, animum veritatis amore incenſum ex unâ in veritatem aliam, tacitâ quadam vi, ac mirâ ſerie deducit, animumque ipſum in purâ veri contemplatione ita exercet, ut jucundiſſimâ primùm voluptate perfundi ille debeat, deinde aſſueſcere puro veritatis lumine delectari; quo certè fit, ut aegrè deinde in veritatis contemplatione fluctuare, & in illius inquirendae ſtudio aberrare vix unquam poſſit. Itaque, etſi Geometricae veritates per ſe laudandæ, vel expetendae minimè forent, egregius tamen hic fructus,

ac

ac veritatis amor impellere nos, atque propemodum incendere deberet, ut omni virium conatu, quaecunque tandem difficultas occurreret, illarum ſtudium amplecteremur. Quid verò ſi haec quidem liberè ego, & ingenuè dixerim, ſed exigua tamen, ac, niſi mea me fallit opinio; nulla jam in Mathematicis difficultas offendi unquam poſſit, quae ingenii noſtri vim remoretur, quâ ingenua laudis, eruditioniſque cupiditas languere in nobis, vel extingui debeat? Non is certè ego ſum, qui huic qualicumque operi, quod vobis exhibeo, id laudis concedam, ut Mathematicas Diſciplinas clariores, nitidioreſque reddiderit, aut qui illud ceteris ullâ in parte anteponendum exiſtimem; id ſolùm certò, conſtanterque teſtari non vereor Mathematicas facultates, eximia in primis Euclidis, Apollonii, & Archimedis Opera ab innumeris Interpretibus ita explicata, ac illuſtrata fuiſſe, ut ſinè duce, ac praeceptore commodè addiſci poſſint; &, ſi quae forſan difficultas reperiatur, hanc ipſam facilè ab ingenuis, ſtudioſiſque Adoleſcentibus dilui, vincique poſſe.

Hac itaque ſpe confirmati, hoc eruditionis, & gloriae comparandae ſtudio incenſi alacriter, ac jucundiſſimè egregii Adoleſcentes Mathematicas diſciplinas adire

poterunt, brevique temporis intervallo, & ingenii conatu facilè intelligent, quàm verè dixerim longè uberiorem voluptatem eſſe, quae in ſtudiis ejuſmodi comparatur, quàm laborem, & induſtriam, quae in acquirendis illis deſideratur: mihique certè laetandum erit, ſi ſtudium hoc meum, quo Adoleſcentium commodo conſulere optavi, illorum eruditioni aliquâ ex parte conferre intellexero.

Quid autem ipſe praeſtiterim, ut haec eruditio clarior, atque facilior eſſet, paullò inferiùs oſtendam; hìc innuere tamen par fuerit, quod, etſi propoſitiones omnes Geometricâ, rigoroſâque methodo oſtenderim, hoc eſt illas ex Definitionibus, Axiomatîs, atque Propoſitionibus antea demonſtratis deduxerim, aliquas tamen ſubinde ſinè demonſtratione nudè, ſimpliciterque, corollarii, ſive coronidis inſtar, propoſui, quòd illae nimirum ex ſuperioribus clariſſimè, nitidiſſimèque deduci poſſent, atque in illis apertè, maniſeſtiſſimèque continerentur; ut e re quoque futurum videretur, ſi juvenes ipſi in corollariis ejuſmodi deducendis utiliter exercerentur. Raró etiam eandem propoſitionem duplici modo, ſive ratione probavi, quamvis id ſæpius fieri poſſet, quòd hoc inutile, in eâ praeſertim brevitate, quam

mihi

mihi propoſui, videretur. Nunquam ſimiliter illorum nomina in margine adjeci, ſi Euclidem, Apollonium, Archimedem, Pappum, atque Serenum excipias, ex quibus propoſitiones, aut demonſtrationes acceperam; propoſitioni tamen XXVIII. libri IX. Torricellii nomen appoſui, ut ſuus eximio Geometrae honor hac etiam in parte conſtaret, quippe qui viderim pulcherrimi inventi gloriam auctori ſuo ſurreptam.

Ceterùm plura, quae aut omiſſa, aut inutilia, aut non rite diſpoſita, aut aliâ quacunque de cauſsâ in hoc opuſculo errata offenderit, humaniter ignoſcat, liberè, & jure ſuo corrigat benevolus lector; quemadmodum enim aliorum ordinem invertere, perturbare, corrigere liberum mihi, integrumque duxi, ita propemodum hanc ipſam, melioremque licentiam in me ceteris omnibus conceſſam velim; tantumque abeſt ut indigner, ſi quis alio diſcendi, docendique genere uti maluerit, meque aliquâ in re deceptum oſtenderit, ut plurimas potiùs ſim illi gratias habiturus, neque ſinè eximiâ certè grati animi ſignificatione ſim id accepturus; ut haec aliquando ſecundis fortaſſe curis optari in me minimè patiar.

Quòd verò ad errores (id enim vitari vix poteſt) qui fortaſſe in textum irrepſerint,

rini, in ipſo opuſculi limine mox attexentur; quamvis enim illorum ſeries ad librorum calcem exponi conſueverit, & a lectoribus plerumque negligi, in Geometricis tamen non ſinè temporis jacturâ, gravique moleſtiâ negligerentur; literula ſiquidem aut omiſſa, aut tranſpoſita, aut perperam addita integrum quandoque Propoſitionis ſenſum corrumpere, & perturbare poteſt. Optaverim itaque, ut antequam Propoſitiones ipſas aggrediatur, notatos errores corrigat diligens lector: quod etiam praeſtabit ubi alios fortaſſe deprehenderit, qui corrigentis oculos, & induſtriam eluſerint.

Pag. 5. verſ. 26. *lege* annuâ. p. 8. v. 17. *l.* poſt Speuſippum Platonis auditorem. p. 16. v. 10. *l.* Xenocrates. v. 27. *l.* queruntur. p. 27 v. 4. *l.* & Axiomata. p. 29. v. 9. *l.* res illius. p. 58. v. 10. *l.* vel V ad T. p. 96. v. 20. *l.* baſes EI, IF. p. 104. v. 9. *l.* & arcus CE. p. 120. v. 24. *l.* extendatur. p. 144. v. 6. *l.* diametri BD. p. 148. v. 6. *l.* in CD bis ſumpto. p. 149. v. 22. *l.* prolixioribus LIIX. p. 152. v. 14. *l* duo. p. 161. v. 29. *l.* erunt dividendo. p. 174. v. 28. *l.* ſeſquialtera. p. 182. v. 19. abſcindatur. p. 189. v. 14. *l.* XLIIII. v. 20 *l.* XLIII. p. 199. v. 21. *l.* obliquus. p. 220. v. 10. *l.* recta CB. p. 222. v. 21 *l.* utrâque parabolâ. p. 238. v. 8. *l.* axim CB. p. 242. v. 5. *l.* ipſis. p. 248. v. 14. & 27. *l.* Evolventem.

DE

DE MATHEMATICÆ

FACULTATIS

Origine, incremento, partibus, utilitate, ac methodo, quâ pertractatur.

PRÆFATIO.

I. CEteras inter artes, ac diſciplinas omnes, quæ ab ingenuis, liberiſque hominibus excoluntur, Mathematicis facultatibus principem ferè locum deberi, non modò veteri, conſtantique Sapientum omnium conſenſu, graviſſimiſque rationibus, ſed ipſo quoque illarum nomine pulcherrimè demonſtratur. Nihil etenim aliud Matheſis nomen ſignificat, ſi græcam vocem Μάθησις interpreteris, quàm *diſciplinam*, *doctrinam*, *ſcientiam*, *eruditionemque*: acſi nomen ſcientiis, & diſciplinis

omnibus commune pulcherrimæ huic facultati, veluti nobiliori illarum parti, atque, ut dicere ſolemus, ob excellentiam concedatur. Neque immeritò certè præclarum ejuſmodi nomen Mathematicæ facultati conceditur, quæ, ſive rerum varietatem, ſive admirabilem partium ordinem, ſive illuſtrium Virorum gloriam, qui perenni ſerie in illâ floruerunt, ſive maximam, & incredibilem prorſus utilitatem, quæ exinde in ſcientias omnes uberrimè diffunditur, ſive denique certitudinem, ac veritatem, quam illa ſemper, & conſtantiſſimè contemplatur, conſideres, ceteras omnes longiſſimè ſuperavit. Quod ſi illius etiam origo ex probatioribus, meliorisque notæ Scriptoribus repetatur, nihil eſt certè quin Mathematicæ diſciplinæ cum antiquioribus ſcientiis hac etiam in parte comparentur.

II. Atque ut eximiæ facultatis hujus originem exponamus, altiùs illa fortaſſe ab ipsâ Mundi origine repetenda cum pleriſque Auctoribus videretur, qui Adamum ipſum Geometriæ, Aſtronomiæ auctorem, ac præceptorem fuiſſe opinantur. Quibus profectò præluxiſſe videtur Joſephus Ebræus dum lib. I. Antiquitatum c. 3. a Sethi nepotibus duas columnas marmoream, & lateritiam excitatas ſcribit, quibus ſiderum periodos, atque cœleſtes alias obſervationes inſcripſerint, ut illas ad poſteros, alterutrâ ſaltem columnâ vel aquæ, vel ignis diluvio, quod futurum acceperant, ſuperſtite, derivarent. Quin etiam plures in ordine, atque arte, quâ Arca a Noacho diſpoſita, ſive conſtructa fuit, rudiora quædam naſcentis adhuc Geometriæ, vel Architectonicæ rudimenta effulgere arbitrantur.

Ve-

Verùm neque commentitiæ Joſephi columnæ, neque ceteræ conjecturæ tanti eſſe debent, ut Mathematicæ originem ex obſcuris adeo, incertiſque fontibus deducamus. Quaſi verò neque ædificia conſtrui, neque obſervari ſidera, neque arca Dei conſilio, & imperio formari potuerit, antequam homines Geometriæ præceptis, certiſque legibus erudirentur.

III. Ut itaque certior, atque conſtantior Mathematicæ origo oſtendatur, unanimi Scriptorum omnium voce Ægyptiis id gloriæ, laudiſque tribuitur. Plato ſiquidem in Phædro Geometriam a ſapientiſſimo, divinoque viro Theut Ægyptio, qui Thami Ægyptii regis ætate floruerit, inventam ſcribit; aſſerens *hunc primum omnium numerum, & numeri computationem inveniſſe, Geometriamque, & Aſtronomiam; talorum rurſus, alearumque ludos, & litcras memorari.* Alii tamen exiſtimant a Mœride Ægypti rege Geometriam inventam eſſe; hic etenim ex Herodoto (a) Pyramides altiſſimas excitavit, aliaque plurima perfecit, quæ Geometricam artem requirere videbantur. Hoc ipſum quoque ſcribit Laërtius (b) *Pythagoram* inquiens *Geometriam perfeciſſe, cùm antea Mœris initia elementorum ejus inveniſſe dicatur;* atque Ariſtoteles ipſe Mathematicas artes ab Ægyptiis Sacerdotibus inventas ſcribit (c).

IV. Eâ verò de cauſsâ Ægyptiis inventio Geometriæ tribuitur, quod cùm Nilus Ægypti flumen annuâ exundatione prædiorum fines confunderet,

(a) *In Euterpe, ſeu lib. 2. Vid. Menag. in lib. VIII. Laërt.* (b) *l. VIII. ſeg. 11.* (c) *Lib. I. Metaphyſ. c. 1.*

ret, ars illa paullatim inventa, atque certis quibusdam legibus, ac præceptis illuſtrata eſt, quæ cùm terram, ſive varias terræ ſuperficies deſcriberet, ac metiretur, *Terræ dimenſio*, ſive Geometria dicebatur; atque deinde ad maris etiam, cœlique ſpatia dimetienda, vel innumera Quantitatis genera, & accidentia contemplanda feliciter extenſa eſt. Celebris eſt Strabonis (a) locus, quo hanc ipſam Geometriæ originem breviter, & accuratè deſcribit: *Opus fuit tam diligenti, ac ſubtili locorum diviſione, propter continuas finium confuſiones, quas Nilus auctus efficiebat, nunc addendo, nunc adimendo, nunc immutando figuras, & ſigna quædam revelando, quibus proprium diſcernitur ab alieno. Unde iterum, atque iterum menſurari oportebat: unde ab iis Geometriam ortum habuiſſe credunt; quemadmodum computandi ſcientiam, & Arithmeticam a Phœnicibus propter mercaturam.* Atque eleganter etiam Herodotus, quem exſcripſiſſe videtur Strabo, *Quod ſi cujus portionem*, inquit, Nilus Ægypti *flumen alluvione decurtaſſet, is adiens Regem, rei, quæ contigerat, certiorem faciebat; rexque ad prædium inſpiciendum mittebat, qui metirentur, quantò minus factum eſſet; ut ex reſiduo pro portione taxatum vectigal penderetur: atque hinc Geometria orta mihi videtur in Græciam tranſcendiſſe. Nam polum, gnomonem, & duodecim diei partes a Babyloniis Græci didicerunt* (b). Ægyptiis itaque, ac Phœnicibus præclarum, atque divinum hoc inventum debetur, quamvis nullum aliud ipſius mo-

(a) *Lib. XVII. vide etiam Serv. in Eclog. III. Virg.*
(b) *Herod. loc. cit.*

monumentum ſuperſit, quàm ſiderum motus, & accurata periodus, quam illi certis quibusdam legibus obſervarunt, ut uberiùs, & opportuniùs in Phyſicâ demonſtrabitur.

V. Quemadmodum verò Græciæ Philoſophi cùm Ægyptum, Aſſyriam, Phœniciam, finitimaſque regiones gravi, diuturnoque itinere penetraſſent, ut a Viris ibi ſapientiæ famâ clarioribus erudirentur, diſciplinarum omnium præcepta in patriam derivarunt, ita quoque Geometriam ipſam ab Ægyptiis ad Græcos tranſtulerunt, quam novis deinde, clarioribuſque inventis auctam, ac illuſtratam mirificè coluerunt; ut veluti Geometriæ parentes, auctores a pleriſque haberi conſueverint. Sic etenim Thaletem Mileſium *Geometriæ præcepta ab Ægyptiis eruditum* (a), *Geometriæ penes Grajos primum repertorem fuiſſe* (b) proditum eſt; a quo deinde Pythagoram ipſum adhuc adoleſcentem in Geometricis eruditum ſcribit Porphyrius(c); quemadmodum certè Pythagoras *maximè promovit, quæ Callimachus in Jambis ait Euphorbum Phrygem inveniſſe, videlicet ſcalena trigona; quæque ad linearum ſpeculationem pertinent* (d). Atque eximium certè Geometram fuiſſe Thaletem, non modò varia, quæ de Tropicis, Zonarum numero, annuo ſolis periodo, pyramidum Ægypti altitudine, eclipſibus ſiderum contemplatus eſt, verùm etiam Propoſitiones aliquæ Geometricæ, quæ ab illo inventæ in Elementis habentur, nimirum V.

(a) *Laërt. lib. I. ſeg.* 25. (b) *Apul. lib. IV. Florid.* (c) *In Vita Pythag. lib. I, cap.* 2, (d) *Laërt. lib. I. ſeg.* 25.

XV. XXVI. XLVII. Libri primi; XXXI. Libri tertii manifeſtiſſimè oſtendunt.

VI. Thaletis itaque ſtudium æmulatus videtur Anaximander & ipſe Mileſius Thaletis auditor, qui Geographicis tabulis inventis, editâ terræ mariſque deſcriptione, deprehensâ Zodiaci obliquitate immortalem ſibi laudem comparavit. Quinetiam Geometriam ipſam compendio hunc pertractaſſe auctor eſt Suidas (a); quemadmodum Anaxagoras, qui poſt Anaximenem Anaximandri auditorem in Jonicâ Scholâ ſucceſſit, dum Athenis exularet, de Circuli dimenſione, tetragoniſmo, ſeu quadraturâ ſcripſit, ut a Plutarcho (b) memoratur.

VI. Pythagoras tamen omnium gloriam longiſſimè ſuperavit. Sive etenim, ut aliqui exiſtimant, ab Ægyptiis, ſive a Thalete Geometriæ elementa acceperit, egregiis adeo ſpeculationibus hanc illuſtravit, ut illam primus inveniſſe meritò videretur. Ac licèt alteram præſertim Mathematicæ partem, nempe Arithmeticam uberiùs ille pertractaverit, atque de numeris, quibus illuſtriora quoque Philoſophiæ dogmata velare conſueverat, egregiè diſſeruerit; plurima tamen, atque immortalia illius inventa in Geometriâ quoque celebrantur: ut quinque regularia corpora (c), quæ deinde Platonica dici cœperunt, & Propoſitiones XXXII. & XLVII. Libri primi; quamvis hæc ultima etiam Thaleti, ſed immeritò fortaſſe ab aliquibus concedatur. *Refert* enim *Apollodorus hecatomben Pythagoram immo-*

(a) *In Anaxim.* (b) *Lib. De Exilio.* (c) *Ex Vet. epigr.*

molaſſe, cum inveniſſet trianguli rectanguli ſubjectum recto angulo latus tantumdem valere, quantum quæ illum continerent (a); quod ad Athenæo libro X. confirmatur. Plutarchus tamen arbitratur Pythagoram Muſis immolaſſe, quòd aream Parabolæ metitus eſſet (b) (utrumque enim inventum ex Pythagoricâ Scholâ prodiiſſe commemorat Proclus (c). Cicero ſanè quid a Pythagora inventum fuerit non definit; ſed univerſaliter inquit, *Pythagoras cùm in Geometriâ quiddam novi inveniſſet, Muſis bovem immolaſſe dicitur; ſed id quidem non credo, quoniam ille ne Apollini quidem Delio hoſtiam immolare voluit, ne aram ſanguine aſpergeret* (d). Itaque bovem vel ex farinâ, ut Porphyrius (e); vel ex argillâ, ut Nazianzenus (f) explicant, ſacrificavit.

VIII. Mirandum ergo non eſt, quod tot ſapientiſſimi viri ex Italicâ, ſeu Pythagoricâ Scholâ prodierint Mathematicæ laude clariſsimi, Democritus, Philolaus, Ariſtarchus, atque inter alios Archytas ille Tarentinus, qui definito arenæ numero, cœli, terræque ambitu deſcripto, fabricatâ ligneâ columbâ, quæ per aërem volaret, aliiſque mechanicis operibus immortale nomen eſt conſequutus, ut ab Horatio dicatur illum veluti

..... maris, & terræ, numeroque carentis arenæ
Menſorem
Aërias tentare domos, animoque rotundum
Percurriſſe polum (g)

A 4 IX. Quid

(a) *Laërt. lib. I. ſeg.* 12. (b) *Lib. quod non poſſit ſuaviter vivi ſecun. Epic.* (c) *In Euclid.* (d) *Lib. III. de Nat.* (e) *In Vita.* (f) *Epiſt.* 183. (g) *Lib. I. Od.* 28.

IX. Quid verò de Platonis ingenio, atque incredibili ſtudio, & amore commemorem, quo Mathematicas diſciplinas omnes, præſertim verò Geometriam amplectebatur? Ille nimirum cùm ſeverioris, puriorisque Geometriæ præcepta a Pythagoricis, ac Cyrænenſi Theodoro accepiſſet (a), adeo ipſius amore exarſit, ut non modò in ſuis Operibus, præcipuè tamen in Epinomide, Phædro, Amatoribus, ac VII. de Republicâ, frequentiſſimè Geometriæ laudes, utilitatemque eleganter, & uberrimè ſit proſecutus, verùm etiam inſcripto foribus Academiæ hoc epigraphe

οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω

Nullus Geometriæ expers accedat,

illos abire juſſerit, vel Academiâ prohibuerit, qui Geometricum antea pulverem non attigiſſent. Quemadmodum certè Xenocrates, qui poſt Polemonem Speuſippi auditorem in Academicâ Platonis Scholâ ſucceſſit, & ſcriptis editis Geometriam illuſtravit, *ad eum, qui neque Muſicâ, neque Geometriâ, neque Aſtronomiâ inſtructus ludum ſuum frequentare cupiebat, Abi, inquit, anſis enim, & adminiculis Philoſophiæ cares* (b).

X. Ariſtoteles etiam Platonis auditor inter præclaros ætatis illius Geometras meritò enumeratur; quippe qui, ut de Mechanicis, & Libro de Inſecabilibus lineis, quæ ſub Ariſtotelis nomine falsò circumferuntur, nihil commemorem, plura ex Mathematicis in libros ſuos derivaverit, quæ a Blancano collecta, atque ſimul compoſita prodierunt.

XI. Pla-

(a) *Ex Laërt. lib. III. ſeg. 6.* (b) *Laërt. lib. IV. ſeg.* 10.

XI. Platoni, atque Ariſtoteli ſynchronus fuit Eudoxus Gnidius, qui circa Olymp. CIII. floruit, atque ad Ægyptios unà cum Platone deſcendit illorum artibus erudiendus. Huic admirabilis Rationum doctrina, quam Euclides integro libro V. nos autem Primo complectimur, velut auctori tribuitur a Græco Scholiaſte; atque ipſum certè, *quæ ad lineas curvas pertinent, inveniſſe* ſcribit Laërtius (a), ut illa prætercam, quæ ſiderum motus, ac Aſtronomiam reſpiciunt, quàm egregiis ille obſervationibus illuſtravit.

XII. Exinde verò Mathematicæ facultates mirum quàm lucis, atque ſplendoris acceperint, cùm Menechmus quidem Eudoxi auditor Sectiones Conicas invenerit; Briſo, Antipho, & Hippocrates Chius Circuli dimenſionem, ſeu quadraturam tentaverint; Hippocrates ipſe, Philo, Diocles, Nicodemus, Sporus Cubi duplicationem Apollinis oraculo Græcis propoſitam variis, ingenioſiſque mediis, quæ ab Eutocio memorantur, aggreſſi fuerint; Perſeus denique Spiralem deſcripſerit, lætitiâque elatus Diis immolaverit. (b)

XIII. Atque hactenus quidem illuſtria Geometrarum inventa disjecta, variiſque locis diſperſa legebantur, cum Hippocrates omnium primus ex variis illorum operibus Elementa collegit, quæ novo ſemper, meliorique ordine diſpoſita, aucta, ac illuſtrata ſunt.

XIV. Præclarè tamen de Geometris omnibus, atque adeo Geometriâ ipsâ meritus eſt Euclides ille, *qui multa Eudoxi, aliorumque ordinavit, mul-*

(a) *Lib. VI. ſeg.* 90. (b) *Ex Procl. lib. II. in Eucl.*

multa Theætheti perfecit, firmioribuſque demonſtrationibus probavit (a); uberiori denique, meliorique, quâ poterat, methodo Geometriæ Elementa pluribus Libris diſpoſita, nobis reliquit: quæ tanti ſemper a clariſſimis etiam Geometris habita ſunt, ut in illuſtrandis illis gravem, diuturnamque operam collocaverint.

XV. Porrò cùm temporis injuria, vel incuria Scriptorum Euclidis hujus ætatem, ac patriam inviderit, ille a pleriſque cum Megarenſi confunditur, qui Socratem audivit, atque Megaricam Sectam inſtituit. Noſtrum tamen a Megarenſi diſtingui oportere manifeſtiſſimè oſtenditur, quòd inter Euclidis Megarenſis Opera a Laërtio accuratè recenſita, nulla ſit Geometriæ mentio. Megarenſis etiam Socratis cum Platone auditor fuit; noſter verò poſterior fuit Menechmo, qui Eudoxum Platonis ſynchronum audivit ex Proclo (b). Ille ex Laërtio vehemens, ac litigioſiſſimus fuit, unde ex auctoris genio in auditores transfuſo Megarica Secta ab illo inſtituta Eriſtica, ſeu contentioſa deinde vocari cœpit; hic verò ex Proclo (c) *mitiſsimus, & benignus erga omnes* fuit; & ex Pappo (d) *ſuaviſſimi ingenii vir, & contentionis minimè amans*. Euclides hic denique ex eodem Proclo floruit Ptolemæi Lagi Ægypto regnantis tempore, hoc eſt annis circiter CCC. ante Chriſtum, cùm Megarenſis ante annos ferè C. obiiſſet.

XVI. Quod autem ad Euclidis noſtri patriam, incertam illam eſſe jam diximus. Id unum a Pro-

(a) *Ex Procl. ibi.* (b) *Lib. II. in Eucl.* (c) *Procl. ibi.* (d) *Lib. VII. Collect. Mathem.*

Proclo traditum, Euclidem Alexandriæ omnium primum Geometricam Scholam aperuiſſe; atque Elementa propria, vel Geometricas Inſtitutiones, quas ex variis auctoribus collegerat, explicaſſe. Addit ille inſuper Euclidem a Ptolemæo rege interrogatum, num alia foret brevior ad Geometriam via, quàm quæ ab ipſo publicè tradebatur? reſpondiſſe

μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ Γεωμετρίαν

non eſſe regiam viam ad Geometriam.

XVII. Tresdecim porrò Libris Euclides hæc Elementa diſpoſuit, ordine inferiùs exponendo; quibus ab Apollonio Pergæo XIV. & XV. quos ab Hypſicle Alexandrino contractos habemus, additos ferunt: quemadmodum nuper Franciſcus Fluſſates Candalla XVI. adjecit. Iniquior eſt itaque in Euclidem Petrus Ramus, quippe qui cenſeat Propoſitiones omnes, aut Elementa, quæ habentur, non Euclidi, ſed Theoni potiùs deberi; atque erroris, invidiæque facilè convincitur, non modò conſtanti veterum omnium conſenſu, qui id operis Euclidi adjudicant, verùm etiam Aphrodiſæi Ariſtotelici Interpretis auctoritate, qui cùm ante Theonem floruerit, varia Elementorum loca ſub Euclidis nomine citare, vel uſurpare conſuevit. Iniquiores etiam, atque injurii ſunt alii, qui Propoſitiones quidem ab Euclide repertas concedunt, ſed a Theone ipſo demonſtratas fuiſſe; quaſi verò Euclides ille, qui pluribus aliis Operibus Geometriam illuſtravit, prima ipſius Elementa proponere ſolùm, atque indemonſtrata relinquere debuerit. Credibile eſt tamen plura a Theone, aliiſve Interpretibus addita fuiſſe; cujus etiam rei argu-

gumento eſſe poterit, quod definitionibus quibusdam Euclides nunquam utatur; aut certè in illo ſenſu, quo nunc in textu reperiuntur: adeoque non ab Euclide conſcriptæ, ſed ab Interprete potiùs additæ, vel textui inſertæ videntur.

XVIII. Hactenus itaque Geometria, variis licèt inventis aucta, atque a clariſſimis Viris illuſtrata, circa Elementa ſolummodo verſari, atque rudis adhuc eſſe, & imperfecta quodammodo videbatur: cum eximium Italiæ decus Archimedes admirabili, ac divinâ prorſus ingenii vi non veteres modò Geometriæ fines, ſed humanæ etiam mentis anguſtias propemodum ſuperavit. Sive etenim Circuli dimenſionem, ſive Parabolæ tetragoniſmum, ſive Spiralium doctrinam, ſive Æquiponderantium, fluidoque inſidentium leges, ſive Conoidum, Sphæroidumque proprietatis, præſertim verò Sphæræ, Cylindrique, quos tumulo ſuperimponi voluit, conſideres (ut varia, atque præclara illius Mechanica prætergeam) meritâ quadam admiratione correptus ambigere poteris, an aliud ex veterum monumentis inveniatur, quò clariùs, & illuſtriùs mentis humanæ ſubtilitas effulgeat.

XIX. Archimedi præluxerat Conon Samius, quem Archimedes ipſe inventionis gloriâ ſæpius commendat, atque extinctum laudibus, lacrimiſque proſequitur. Eratoſthenes etiam utriuſque ætate floruit Telluris dimenſione celebris. Breviquue poſt illos Geometriam præclarè illuſtravit Apollonius, qui ex Perge quidem Pamphiliæ urbe, quam patriam habuit, Pergæus; ex innumeris autem inventis, quibus Conicarum Sectionum originem, & proprietates omnes VIII.

Li-

Libris complexus eſt, *Magnus Geometra* vocari conſuevit.

XX. Illorum verò ſtudium æmulati ſunt Hipparchus Aſtronomus; Menelaus, qui de Triangulis ſphæricis ſcripſit; Theodorus Tripolita, qui Sphæricorum Libros III. reliquit; Serenus, qui Libros II. de Coni, Cylindrique Sectione compoſuit; Geminus, Diophantus, aliique plurimi; atque inter ceteros Pappus Alexandrinus qui, cùm Libris VII. Mathematicarum Collectionum veterum Geometrarum inventa diſpoſuiſſet, ne temporis injuriâ perirent, meruerat certè ne priores duos ipſius libros eâdem iniquitate amitteremus.

XXI. Atque iſta quidem de veteri Geometriâ, ſive de origine, incremento, gloriâ, atque præſtantiâ, quâ apud Veteres ad hæc uſque tempora floruit. Quod ſi modò Geometriam ipſam a Recentioribus auctam, & illuſtratam exponere, ſi illuſtriores Geometras, qui ſuperiori ſeculo floruere, laudibus proſequi, vel recenſere mens foret, nullus, ut opinor, eſſet dicendi finis, nova nimirum ſemper, uberior, atque nobilior dicendi materies orireretur. Itaque libenter illa prætereo, tum quòd ejuſmodi Recentiorum inventa ad prima Geometriæ Elementa, vel Inſtitutiones, quas exhibere nunc volui, non pertineant; tum etiam quòd hæc ipſa fuſiùs in Hiſtoriâ Geometricâ, cui Philoſophicam Stanleii hiſtoriam imitatus jam manum admovi, ſim aliquando proſequuturus.

XXII. Nihil eſt etiam cur Mathematicæ facultatis uſum, præſtantiam, atque admirabilem vim ex veteri aliorum more exponere aggrediar, cùm id etiam commodiùs, atque opportuniùs alibi

bi præſtiterim. Deinde verò quis maximas, & incredibiles Geometriæ laudes, quibus a ſapientiſſimis quibuſque viris eſt exornata, ac mirificè illuſtrata, breviter complecti poſſit? quis eximium lumen, & commoda, quæ in ſcientias, & artes omnes, præſertim verò Philoſophiam, ex Mathematicis ſtudiis uberrimè manarunt, non dicam pro rei dignitate proſequi, ſed numerando recenſere valeat? quis denique ſatis exprimeret jucundiſſimam voluptatem, quâ certè mens hominum ſuaviſſimè, geometrica meditando, perfunditur, ut Archimedis etiam exemplo elegantiſſimè oſtendit Cicero (a)? Suis itaque in fontibus, qui plura deſiderat, Platonem, Ariſtotelem, Ciceronem ipſum; & qui Platonis, Ariſtotelis, aliorumque ſententias collegerunt, Clavium, Ramum, ceteroſque plurimos adire poterit: ego etenim vehementiùs certè optari, atque ab egregiis Adoleſcentibus ſperari poſſe confido, ut experimento potiùs, quàm aliorum, licèt graviſſimâ, authoritate intelligant, quanta in Mathematicis contemplationibus jucunditas, ac utilitas reperiatur; ut fortiùs adhuc ad illarum ſtudium, & amorem incendantur.

XXIII. Id unum poſtremò hoc loco dicendum videretur quid me præſertim impulerit, ut Geometricas Inſtitutiones adornarem, poſtquam innumeræ ferè methodo, & mole diverſæ prodierunt. Quâ quidem in re, etſi me, conſiliumque meum libero potiùs, & æquo Lectorum judicio committere decreverim, illud hìc tamen ingenuè fateri, ſanctèque teſtari juverit, me neque lau-

dis

(a) *Tuſc. V.*

dis amore, neque diſſentiendi ſtudio, neque innovandi cupiditate hanc operis partem ſuſcepiſſe; ſed ut optimis solùm, & egregiis Adoleſcentibus, illorumque commodo, ac eruditioni hac etiam in parte conſulerem.

XXIV. Animadverteram ſiquidem, quod plurimi quidem ſapientiſſimi Viri Elementa Geometriæ conſcripſerunt; omnes tamen, iique præſertim, qui veterem Euclidis ordinem invertere, ſive mutare nefas duxere, alterutrâ in parte peccarunt, ut vel minùs utilia longiori, prolixiorique methodo proſequerentur; vel nimiùm brevi, conciſâque ratione plura, vel pulchriora, vel neceſſaria negligerent, aut leviter certè attingerent; quodque a delicatiori, nobiliorique Geometriæ genio plurimùm diſſidet, inter principia, ſive definitiones ea numerarent, quorum veritas, tantum abeſt, ut primo, leviorique mentis intuitu ſtatim effulgeat, ut potiùs a principiis ipſis longâ quadam rationum ſerie deduci debeat. Quod ſi qui fortaſſe breviter, accuratè, perſpicuèque Geometricas Inſtitutiones ediderint; nullus eſt tamen, cui ſimul omnia, quæ ad Elementa ſpectare poterant, complecti libuerit; ut Euclides proinde ab Apollonio, Apollonius ab Archimede ſejunctus diverſis plerumque methodo, loco, ſcriptore, vel interprete legi deberet; unde ſanè, quàm gravis obſcuritas, atque confuſio oriri ſoleat, omnes norunt, qui arctiſſimam connexionem illam intelligant, quæ in omnibus Geometriæ partibus ineſſe debet, ut nitidâ quadam, facili, æquabili, conſtantique ſerie ab unâ veritate ſenſim in aliam addiſcentium animus deducatur, quod ægrè certè præſtari,

ſtari, ſperarique poterit, ubi diverſa methodus adhibeatur.

XXV. Accedit etiam, quod cùm Philoſophicas Inſtitutiones, quarum jam partem edidi, adornarem, plura ſubinde, præſertim in Phyſicâ, ex variis Geometriæ partibus adhibere mihi contigerit, unde Phyſicæ maximus ſplendor accederet. Illud itaque optandum, vel e re futurum videbatur, ut hæc omnia Geometriæ lumina, vel ut Xenophanes inquit, Philoſophiæ anſæ, quæ partim ab Euclide, partim ex Apollonio, & Archimede, partim ex Torricellio, & Hugenio, partim denique ex aliis Auctoribus repetenda fuerant, unà collecta, ſive in corpus unum compoſita exponerentur, ad quæ tyrones Philoſophi facilè convolarent; cùm præſertim aut neceſſaria librorum copia, aut temporis opportunitas, aut etiam ingenii vis omnibus ſuppetere poſſe non videretur, ut ſuis ipſi in fontibus omnia attingerent.

XXVI. Quàm verò feliciter hæc ipſe præſtiterim, ſuſceptique conſilii partes impleverim, viderint alii; omnem certè aut ingenii vim, aut operam, quæ hactenus licuit, in illo collocavi; atque præſertim naturalem illum rerum ordinem, quem omnes ab Euclide neglectum, atque mirificè perturbatum quæruntur, accuratiſſimè, ac religiosè ſervavi, ut ex ſingulis Librorum titulis, inferiùs oſtendetur. Plurima deinde poſitivè, hoc eſt affirmativis rationibus demonſtravi, quæ a ceteris negativè ſolùm, ſive per impoſſibile, & abſurdum oſtendebantur. Eam denique brevitatem ſum conſectatus, quâ non obſcurior, ſed adhibitâ faciliori metho-

thodo clarior fierem; unde, licèt plura breviùs adhuc exponere potuiſſem, malui tamen hæc aliquando fuſiùs, modò clariùs, affirmativè, & univerſaliùs, demonſtrare; de illuminando potiùs, quàm convincendo, cogendoque intellectu ſollicitus. Sed ut operis hujus diviſio, vel methodus intelligi poſſit, exponendum priùs eſt univerſæ Mathematicæ facultatis objectum, atque diviſio, quod breviter hìc præſtabo.

XXVII. Mathematicæ facultates, ut antea dixi, Quantitatem, magnitudinem, aut extenſionem veluti objectum conſiderant, ejuſque partes, proprietates omnes, & munera contemplantur; unde ex vario Quantitatis, vel extenſionis genere, variæ quoque Mathematicæ partes, aut Scientiæ in Mathematicâ optimè diſtinguuntur.

Quantitas autem, vel magnitudo nihil eſt aliud, quàm id, quod partes habet, vel partes habere concipitur; ſive potiùs eſt eadem extenſio, quæ ex partibus ipſis reſultat; unde ex vario partium ordine, ſeu conjunctione, variæ quoque Quantitatis ſpecies oriuntur.

Quantitas itaque alia dicitur eſſe *continua*, in quâ partes continuæ, connexæ, ſibique conjunctæ ſunt; ut linea, corpus &c. Quantitas alia *diſcreta* vocatur, quòd ex diſcretis, ſejunctiſque partibus componatur, ut *numerus*.

Quandoquidem verò partes illæ continuæ, ſive connexæ extenduntur vel in longum tantummodo; vel in longum ſimul, & latum; vel in longum, latum, & profundum, tres exinde continuæ quantitatis ſpecies deducuntur, *linea*, *ſuperficies*, & *corpus*; quarum quidem linea lon-

 gitu-

gitudinem habet ſinè latitudine; ſuperficies longitudinem, ac latitudinem ſinè profunditate; corpus denique, ſive ſolidum longitudinem, ac latitudinem cum profunditate.

Quantitas verò diſcreta, vel numerus in totidem partes, ſive ſpecies diſtingui poteſt, quot ſunt ipſi numeri, qui differentiâ, vel exceſſu quodam ſe ſuperant; vel quot ſunt munera, ſive proprietates, & accidentia, quæ in numeris ipſis concipiuntur, ut Libro II. declarabimus.

Ex hoc itaque duplici Quantitatis, vel Magnitudinis *continuæ*, atque *diſcretæ* genere deducitur illa diviſio Mathematicæ in Geometriam, & Arithmeticam, quæ a veteribus ipſis uſurpata fuerat. Geometria ſiquidem omnia quantitatis continuæ genera contemplatur; Arithmetica verò de numeris, vel quantitate diſcretâ diſſerit.

Cùm verò plurimi, ac infiniti ferè ſint modi, quibus eadem quantitas concipi, vel conſiderari poteſt; ſive cùm plurimæ, ac infinitæ ferè ſint proprietates illæ, quæ in ſingulis magnitudinum generibus obſervantur, plurimæ quoque ſunt facultates illæ, vel Scientiæ, vel Artes, quæ Geometriæ ſubalternari, ſive ſubeſſe dicuntur, hoc eſt illius principiis innituntur, atque ipſius lumine in inquirendis magnitudinum proprietatibus utuntur, ut Aſtronomia, Mechanica Statica, Optica &c.; quemadmodum etiam Muſica, cùm plurima ab Arithmeticis demonſtrata ſupponat, Arithmeticæ ſubalternari dicitur.

XXVIII. Atque ex hac quidem celebri, clariſſimâque Geometriæ diviſione univerſum ordinem, ac methodum, quam hac in parte ſervavimus, veluti puriori quodam, certiorifque fonte deduximus.

1. Pri-

1. Primo itaque loco, vel Libro Magnitudines ipſas, aut Quantitates omnes univerſaliter conſiderabimus; illarumque Rationes, hoc eſt habitudines, ſive reſpectus, & ordines, quibus inter ſe referuntur, contemplabimur.

2. Deinde verò in ſecundo Rationum illarum ſimilitudines, analogias, proprietates omnes, & accidentia deducemus.

3. In tertio Libro, cùm de continuâ quantitate dicendum ſit, atque a primâ, ſimpliciorique illius ſpecie incipiendum, de Lineis inter ſe concurrentibus, & Angulis, qui exinde formantur, agemus.

4. Quartus autem Liber Lineas inter ſe minimè concurrentes, hoc eſt Parallelas, earumque proprietates exponet.

5. De Lineis intra circulum inter ſe concurrentibus, ſive non concurrentibus; ſive de Lineis, & Angulis, qui deſcribuntur in circulo, in Libro quinto diſſeremus.

6. Sextus ad alteram continuæ quantitatis ſpeciem, hoc eſt ad Superficies, ſive Figuras omnes accedet; illarumque proprietates, & dimenſiones exhibebit.

7. Deinde Figuras omnes in ſeptimo ſeparatim examinabimus, quæ certo quodam æqualium laterum, & angulorum numero continentur, unde *Similes* appellantur.

8. Tertium deinde quantitatis continuæ genus, hoc eſt Solida, ſive Corpora contemplati, illorum ſuperficies, quibus extrinſecùs ambiuntur, inſpiciemus.

9. Tum ſequenti loco ſoliditatem ipſam, molem, vel triplicem Corporum extenſionem metiemur.

10. Cùm autem Corpora, præſertim verò Conus, tranſverſo plano ita ſecari conſueverit, ut in eodem plano ſecante, vel in curvâ ſecti Coni ſuperficie, lineæ quædam curvæ deſcribantur, quæ *Conicæ Figuræ*, ſive *Sectiones* vocantur, Figuras ipſas, vel Conicas Sectiones, illarumque proprietates decimo Libro complectemur.

11. Undecimo deinde loco Solida, ſive Corpora comparabimus, quæ a Conicis Sectionibus oriuntur, ſeu producuntur.

12. Ultimo tandem Libro variarum Curvarum, Figurarum, Solidorumque geneſim, dimenſionem, proprietates, & accidentia ſubjiciemus, ex quibus plurimus ſplendor non Geometricis modò Inſtitutionibus, verùm etiam Phyſicæ, aliiſque facultatibus omnibus orietur.

XXIX. Quàm verò nitida, vel ipſi rerum naturæ accommodata ſit hæc Geometriæ pertractandæ ratio, non intelligere ſolùm, ſed experiri quoque facilè is poterit, qui præcipuam methodi legem, rerumque docendarum ordinem hunc eſſe noverit, ut ab univerſalibus ad particularia, a ſimplicioribus ad compoſita ſenſim æquabili, ac tacitâ quadam ſerie deſcendatur; nec unquam diverſa rerum genera in unum locum temere congerantur, ſive promiſcuè pertractentur.

XXX. Intelliget etiam cur a veteri Euclidis, ejuſque Interpretum ordine receſſerim, atque illuſtriora quidem, ac utiliora Theoremata, quæ in ipſis habentur, eo, quo par erat, Geometrico nexu, atque rigore demonſtranda ſelegerim; alio tamen ordine, vel ſerie ſuis in locis opportunè diſpoſuerim. Quamvis enim veteres omnes Eucli-

clidem velut eximium Geometriæ lumen meritò ſuſpexerint, ejuſque Elementa perennis, & conſtans bis mille annorum uſus probaverit, atque innumeri ſapientes viri in explicandis, augendis, illuſtrandis illis gravem operam collocaverint; plura tamen in Elementis ipſis optari poſſe, atque præſertim ordinem, quo res ſingulæ ſuis in locis accuratè, diſtinctèque tractentur, complures alii Geometræ exiſtimarunt. Ac quoad rerum ordinem pertinet, cùm Euclides quatuor prioribus Libris partim de primâ, partim de ſecundâ quantitatis continuæ ſpecie promiſcuè egiſset; in primo nempe de lineis, angulis, & figuris rectilineis; in ſecundo ſimiliter de figuris rectilineis determinati, certique generis, quadratis nimirum, atque rectangulis; in tertio de circulis; in quarto rurſus de figuris præſertim regularibus; in quinto deinde de quantitate univerſaliter, ſive de magnitudinum rationibus agere inſtituit, iterum in ſexto de figuris omnibus rectilineis locuturus; tum ſeptimo, octavo, & nono de alterâ quantitatis ſpecie, nimirum de numeris diſſerit; in decimo rurſus de lineis, & figuris; in undecimo denique, duodecimo, ceteriſque ſequentibus corpora, ſive ſolida conſiderat.

XXXI. Quod ſi fortaſſe ſingulas alicujus Libri propoſitiones, illarumque ſeriem conſideres, gravior adhuc perplexitas, atque confuſio videbitur, cùm eadem res, vel ejuſmodi certè, quæ conjunctæ, connexæque eſſe debuerant, diverſis in locis, interjectiſque aliis propoſitionibus explicaverit; ut ex. gr. in libro I. duo triangula, illorumque latera, & angulos inter ſe comparat propoſi-

tionibus IV. VIII. XXIV. XXV. XXVI. quemadmodum duo ejusdem trianguli latera, & angulos propoſitione V. VI. XVIII. XIX. Primò triangula, eorumque ſuperficiem conſiderat, tum ad lineas rectas, vel bifariam dividendas, vel perpendiculariter ducendas tranſit, ad triangulorum ſuperficiem iterum rediturus.

XXXII. Illud etiam in Euclide reprehendi ſolet, quod plura probaverit, quæ probatione non indigent; ut ſunt plurimæ propoſitiones, quæ in tertio Libro reperiuntur, atque ex ſolâ lineæ rectæ, vel, circuli ideâ manifeſtiſſimè effulgent.

Eadem quoque ſubinde repetit; ſive quæ minùs univerſaliter antea demonſtraverat, univerſaliùs deinde oſtendit, quod præſertim in propoſitione XVI. XVII. apparet ſi cum XXXII. ejuſque corollario comparentur: in XLVII. Libri primi ſi cum XXXI. Libri tertii conferatur.

XXXIII. Ceterùm in Elementis Euclidis mirus propemodum eſt propoſitionum nexus, ut una ex alterâ ſponte quadam ſuâ oriatur, atque adeo conjunctæ, colligatæque ſint, ut ſi una fortaſſe ommittatur, ſequentis veritas fluctuare, ac labi videatur. Atque hoc ipſum impulit Euclidem, ut ordinem ſuperiùs expoſitum adhiberet, quod cùm ſequentium propoſitionum veritas non aliter oſtendi poſſe videretur, quàm ſi ex pluribus aliis longâ quadam ſerie deduceretur, has antea demonſtrare, vel interjectis aliis oſtendere coactus ſit.

XXXIV. Hinc etiam oritur prolixitas illa, quæ in Elementis ipſis obſervatur, ut aliquando nimirum longâ propoſitionum ſerie ex aliquo remoto principio ea deducat, quæ ex proxi-

ximiori, clariorique fonte breviùs inferri poterant. Quod cùm pluribus aliis in locis, tum maximè in quinto Libro offenditur. Illud enim a Geometris omnibus eſt obſervatum, Librum hunc paullo obſcuriorem, & prolixiorem eſſe, cùm per varias infinitarum magnitudinum multiplicium ambages magnitudinum rationes, ſeu proportiones rimetur: quodque a nitidiſſimo, certiſſimo, pulcherrimoque Geometriæ candore maximè abhorret, ambiguum, & incertum illum eſſe opinantur, quòd unicè ſoli definitioni ſextæ innitatur, quæ tantum abeſt, ut perſpicuitate, & evidentiâ definitionis locum obtineat, ut obſcurum potiùs, ac difficile Theorema cenſeri debeat.

XXXV. Hæc itaque obſcuritas, prolixitas, atque confuſio, quæ in Euclidis ordine, ſive propoſitionum ſerie ſubinde deprehenditur, plurimos impulit, ut Elementa Geometrica novâ methodo, propoſitionumque ſerie adornarent; quod iisdem ferè de cauſſis in Apollonii, Archimedis, aliorumque libris præſtiterunt: quos inter Torricellius, Borellius, Barrovius, Mydorgius, Tacquetus, Hiræus aut omnes, aut aliquos ſolùm Archimedis, & Apollonii libros illuſtrarunt; Borellius ipſe, Arnaldus, Pardies, Malezievius, aliique plurimi in novis Geometriæ Elementis maximam ingenii laudem ſunt conſecuti. Quorum quidem ſapientum hominum authoritas, graviſſimumque judicium, non modò omni me invidiâ, ac reprehenſione liberat, ſi quæ tamen in Scientiis pertractandis, vel inquirendæ veritatis ſtudio fortaſſe eſſe poſſit; verùm etiam mirificè hortatur, ut hujuſmodi con-

ſilium, ipſis facem veluti præferentibus, aggrediar.

XXXVI. Quod ſi ab illorum etiam methodo receſſerim, non aliâ certè de cauſsâ id factum eſt, niſi quòd in ipſis etiam aliquid adhuc optandum ſupererat, uberior nempe, vel clarior, vel certior illorum cognitio, quæ ad Elementa pertinent, ut paullo ſuperiùs oſtendi. Neque tamen is ego ſum, qui in Elementis iſtis plura corrigi, detrahi, adjungi, mutarique poſſe non cenſeam; id unum ab æquis, boniſque Judicibus concedi poſſe confido, ut hæc erudiendis Adoleſcentibus, ſi rerum ordinem, copiam, brevitatem, nitoremque deſideres, ceteris commodiora videantur. Quod in ſingulis quidem libris intelligere facilè is poterit, qui in ipſos vel obiter oculos conjecerit; præſertim tamen in primo libro, vel quinto Euclidis, in quo illuſtrando, corrigendo; vel, quod maximè interſerat, ad Geometricam certitudinem evehendo Galileus, Borellius, Tacquetus, aliique plurimi laborarunt: hunc etenim duplò breviorem, clariorem, certioremque reddidi, ex unius perſpicui principii lumine; atque, ſi unam propoſitionem exceperis, affirmativè ſingula demonſtravi. Æquidiſtantium quoque linearum doctrinam, quam ab Euclide obſcuram, & incertam, a compluribus autem illuſtratam accepimus, affirmativè ſimiliter oſtendi. Sed hæc, aliaque id genus facilè agnoſcet benevolus lector, ſi mea cum ceteris comparaverit.

XXXVII. Quandoquidem verò propoſitiones illæ, quæ in Elementis oſtenduntur, eodem ordine, quo ab Euclide diſpoſitæ, vel demonſtratæ

tæ fuerint non a veteribus ſolùm, ſed a recentioribus etiam Geometris adhiberi, atque citari plerumque conſueverunt, ne ulla exinde vel levis obſcuritas, ſive confuſio oriretur, atque intelligi facilè poſſet quid in quaque propoſitione ſuâ Euclides oſtenderit, in demonſtrandis quidem Propoſitionibus novum, meumque ordinem adhibebo, atque in margine loca, vel numeros eâdem ſerie citabo, quâ a me Propoſitiones aliæ diſpoſitæ, vel demonſtratæ antea fuerint; ſingulis tamen propoſitionibus meis numerum in margine adjeci, quo Euclidis, Apollonii, Archimedis propoſitio indicatur, cui mea reſpondeat; quemadmodum etiam ad Opuſculi calcem addidi ſeriem Propoſitionum omnium, ordine, quo ab Euclide demonſtrantur, & locum inſuper, aut numerum indicavi, quo eadem Propoſitio a me probatur, niſi illa fortaſſe tanquam inutilis omiſſa fuerit.

XXXVIII. Hæc ſunt, amice Lector, quæ te in ipſo operis limine monendum duxeram, non ut muneris hujus pompam ambitioſiùs facerem, ſed ut conſilium hoc meum, leges, & ordinem, quibus hæc omnia proſequerer, exponerem. Quæ ſi probari intellexero, non modò jucundiſſimam hanc mihi ſortem mirificè gratulabor, ſed etiam vehementiùs adhuc incendar ad ea perficienda, quæ Adoleſcentibus Geometriæ candidatis, atque hæc Elementa jam prætergreſſis in ceteris ſeverioribus, penitioriſque Mathematicæ partibus uſui, atque præſidio eſſe poſſint.

Quid-

DEFINITIONES.

I. Quidquid in Geometriâ pertractatur, ſive quidquid in illâ vel efficiendum, vel demonſtrandum proponitur, *Propoſitio* vocatur; atque illa quidem Propoſitio, in quâ aliquid a Geometra deſcribendum, vel efficiendum fuerit, dicitur eſſe *Problema;* illa verò, in quâ de re jam formatâ, ſive deſcriptâ differatur, ejuſque proprietas aliqua demonſtretur, *Theorema*.

Lemma, vel, ut vertit Cicero, *Præſumptio*, dicitur illa Propoſitio, quæ alteri Propoſitioni veluti principaliori demonſtrandæ inſervit; atque ſeorſim ab illâ ponitur, ne principalis vis, & ſeries perturbetur.

Corollarium autem, ſeu *Conſectarium*, aut *Scholium*, eſt illa Veritas, aut Propoſitio, quæ ab aliquâ Propoſitione jam demonſtratâ facilè, nulloque negotio veluti appendix deducitur.

II. Ut aliqua Propoſitio demonſtretur, Axiomatîs, Poſtulatis, & Definitionibus uti ſolemus.

Axiomata, ſeu *Pronunciata*, vel *Effata* dicuntur illæ Propoſitiones, quarum veritas adeo certa, & evidens eſt, ut cuilibet menti vel leviter cogitanti ſtatim affulgeat; unde nec ab ullo negari, nec ab ullo probari poſſunt.

Poſtulata verò continent illa, quæ ut aliquid oſtendatur, fieri, vel concipi plerumque debent ut facta; quæque proinde ſemel conceſſa, tanquam certa, ac poſſibilia deinde adhibentur.

Definitiones denique ſunt orationes illæ, quæ exponunt, clariùſque explicant voces, quibus in

in Geometriâ utimur; aut certè res illas, quæ vocibus ipſis ſignificantur.

Omnibus itaque Geometriæ partibus Pronunciata, & Poſtulata præmittimus, quæ omnibus Libris communia ſunt: definitiones autem, quæ ſingulis Libris, rebuſque, quæ in iis pertractantur, conveniunt, illorum initio exponemus.

AXIOMATA, SIVE PRIMA PRINCIPIA.

I. Totum eſt majus ſuâ parte.

II. Totum eſt æquale partibus omnibus ſimul ſumptis.

III. Si ab æqualibus æqualia demantur, remanent æqualia.

IV. Si æqualibus æqualia adjiciantur, erunt æqualia.

V. Si vel æqualibus inæqualia, vel inæqualibus æqualia demantur, vel adjiciantur, erunt inæqualia.

VI. Quæ mutuò ſuperimpoſita congruunt, ſunt æqualia.

VII. Quæ ſunt æqualia uni tertio, ſunt æqualia inter ſe.

VIII. Quæ ſunt ejuſdem magnitudinis, vel æqualium magnitudinum dimidia, tertia, vel quarta &c. pars, aut dupla, tripla, quadrupla &c. æqualia ſunt inter ſe.

IX. Magnitudo, quæ alterâ magnitudine neque major, neque minor eſſe poteſt, eſt ipſi æqualis.

X. Si prima magnitudo fuerit major ſecundâ; & ſecunda ſimiliter major tertiâ, erit eadem prima magnitudo major etiam tertiâ.

LIBER PRIMUS

De Magnitudinibus inter ſe comparatis, ſive de Magnitudinum Rationibus.

QUid in hoc primo Mathematicæ Libro, quem de variis Magnitudinibus inter ſe comparatis inſcripſi, complectar, quidve in hoc vel uberiùs illuſtrando, vel breviùs diſponendo præſtiterim, fuſiùs, & opportuniùs ſuperiori loco jam dixi. Nihil eſt itaque, quod hujus doctrinæ laudes, utilitatemque prorſus eximiam iterum exponam. Id unum meritò addi poterit, nullam eſſe Mathematicæ partem, ex quâ non in ceteras modò pulcherrimæ Facultatis hujus partes, ſed in Scientias quoque, & artes omnes uberior lux diffundatur; nihilque etiam eſſe, quod admirabilem Infiniti ipſius naturam, & accidentia nobis oſtendat; nihil denique, quod mentis lumen vividiùs accendat, atque divinam illius originem, excogitandique ſubtilitatem demonſtret. Omnibus itaque ingenii viribus enitendum eſt, ut accuratiſſimè, & quàm fieri poterit intimè percipiantur omnia, quæ de Magnitudinibus ipſis, illarumque Rationi-

ni-

nibus, variâque methodo, quâ inter ſe conferri illæ poſſunt, breviter, & ordine demonſtrabo.

DEFINITIONES.

I.

Magnitudo dicitur id, quod partes habet, vel partes habere concipitur, ut *linea*, *numerus*, *motus*, *tempus*, *potentia*, *&c.* ſive eſt omne id, quod, ſi cum aliâ re comparetur, illius æqualis, aut illâ major, aut minor dicitur.

II.

Magnitudines illæ *homogeneæ* dicuntur, quæ ſunt ejuſdem generis; ut lineæ, vel parvæ, vel magnæ ſint, omnes in eodem extenſionis genere, vel ſpecie, nimirum in longitudine continentur, vel ad illam pertinent; ſic omnes anguli, numerique, quicumque illi ſint, ſemper ejuſdem generis eſſe debent.

III.

Aliqua magnitudo alterius magnitudinis *pars* eſſe dicitur, cum aliquoties in illâ continetur; ſive cum aliquoties ſumpta illam accuratè, vel exactè metitur, ut nihil ſuperſit: ut ex. gr. numerus 3 pars eſſe dicitur numeri 12, quia quater ſumptus illum accuratè componit.

IV.

Illa verò magnitudo, quæ menſuratur ab aliâ magnitudine, vel ab illâ tamquam a parte ſæpius ſumptâ componitur, ſive quæ magnitudine aliam aliquoties continet, illius *multiplex* dicitur, ut numerus 12 numeri 3, aut 4 multiplex eſt.

Par-

V.

Partes *ſimiles* dicuntur illæ, quæ æquali numero, ſive totidem vicibus in illis magnitudinibus, quarum partes ſunt, continentur.

VI.

Equèmultiplices autem dicuntur duæ magnitudines aliarum duarum magnitudinum, cum illas æqualiter, hoc eſt æquali numero, vel totidem vicibus continent.

VII.

Magnitudines illæ *commenſurabiles* eſſe dicuntur, quæ communem aliquam menſuram habent; cum nempe inveniri poterit aliqua magnitudo, quæ ſit pars utriuſque; hoc eſt aliquoties ſumpta utramque magnitudinem metiatur.

VIII.

Sic omnes numeri commenſurabiles ſunt; quilibet enim numerus ab unitate aliquoties ſumptâ componitur, aut menſuratur.

IX.

In ſingulis etiam continuæ quantitatis generibus, aut in iis, quæ continuis quantitatibus exprimuntur, magnitudines aliquæ commenſurabiles eſſe poterunt; cùm illæ menſuram aliquam, ſive partem communem habere poſſint.

X.

Quod ſi communis aliqua duarum magnitudinum menſura in quotlibet æquales partes dividatur, quælibet etiam ex his novis partibus erit communis utriuſque propoſitæ magnitudinis menſura.

XI.

Cùm itaque communis duarum magnitudinum menſura in plures partes; atque iſtæ rurſus in alias

alias in infinitum dividi poſſint, inveniri poterit aliqua duarum commenſurabilium menſura, quæ minor ſit quacumque propoſitâ magnitudine.

XII.

Hinc propoſitis duabus magnitudinibus CD, CI, quæ commenſurabiles ſint, & differant exceſſu quantumcumque parvo ID, inveniri poterit aliqua pars alterutrius M, vel O, quæ ſit utriuſque CD, CI, communis menſura, & minor ſit exceſſu, vel differentiâ ID. Fig. V.

XIII.

Et, ſi incommenſurabiles ſint ipſæ CD, CI, inveniri poterit, bifariam ſemper dividendo alterutram magnitudinem ex. gr. CD, aliqua ipſius pars M, vel O, quæ minor ſit exceſſu, vel differentiâ ID.

XIV.

Quod ſi nulla communis menſura duarum magnitudinum inveniri poterit, *incommenſurabiles* illæ dicuntur.

XV.

Ratio unius magnitudinis ad aliam magnitudinem eſt ordo, habitudo, vel reſpectus ille, quo una magnitudo reſpicit aliam, vel ſe habet ad illam; ſive eſt modus ille, quo aliqua magnitudo continet aliam magnitudinem, vel ab aliâ magnitudine continetur.

XVI.

Hinc Ratio ſemper inter duas magnitudines reperitur, quarum una refertur ad aliam, ſive continet, & reſpicit illam; altera verò reſpicitur, aut continetur a primâ.

Illa

XVII.

Illa magnitudo, quæ refertur ad aliam, dicitur *antecedens*; & alia magnitudo, ad quam prima refertur, dicitur *conſequens*.

XVIII.

Porrò magnitudines illæ inter ſe rationem habere poterunt, quæ ſunt homogeneæ, vel ejuſdem generis; ſi etenim forent diverſi generis, una non contineret aliam, neque contineretur ab illâ, ut numerus in lineâ, angulus in tempore non continetur.

XIX.

Tunc autem ratio unius magnitudinis ad aliam magnitudinem dicetur *eadem*, vel *ſimilis* eſſe rationi alterius tertiæ magnitudinis ad aliam quartam magnitudinem, cum prima magnitudo eodem modo continet, aut reſpicit ſecundam; ſive reſpicitur, aut continetur ab illâ, quo tertia continet, aut reſpicit quartam; ſive reſpicitur, aut continetur ab illâ.

XX.

Ejuſmodi verò ſimilitudo rationum *Proportio* dicitur; & quatuor magnitudines illæ, quarum rationes ſimiles fuerint, *proportionales* vocantur; diciturque prima ſe habere, vel eſſe ad ſecundam, ut tertia ad quartam.

XXI.

Hinc ſi prima magnitudo fuerit major ſecundâ; etiam tertia erit major quartâ; ſi prima fuerit æqualis ſecundæ, etiam tertia quartæ; ſi denique prima minor ſecundâ, etiam tertia minor erit quartâ.

De-

XXII.

Denique magnitudines illæ, quæ in proportione referuntur ad alias, hoc eſt antecedentes; aut illæ, ad quas fit relatio, ſeu conſequentes, vocantur *homologa*.

Quid verò ſit primam magnitudinem eodem, vel ſimili modo continere ſecundam, quo tertia continet quartam; ſive quid Proportionis nomine intelligi debeat, etſi diverſo modo ab Euclide, aliiſque Geometris explicetur, non aliâ tamen clariori ratione concipi, vel exprimi poteſt, quàm ſi magnitudines ipſa homologa in plures partes ſimiles diviſa concipiantur.

Intelligantur enim priores duæ magnitudines, hoc eſt prima, & ſecunda AB, CD, *commenſurabiles eſſe, atque aſſumptâ communi illarum menſurâ* M, *contineatur hac in majori, ex. gr. primâ, magnitudine decem, in minori verò ſeptem vicibus, ut illa proinde communis menſura ſit decima pars prima magnitudinis, & ſeptima ſecunda; deinde ubi tertia magnitudo* EF *in decem partes diviſa fuerit, ſi reperiatur ex his decimis partibus tertia magnitudinis ſeptem partes in quartâ quoque magnitudine contineri, tunc optimè inferri poterit primam magnitudinem continere ſecundam eodem prorſus, vel ſimili modo, quo tertia continet quartam; ſive conſequentes magnitudines eaſdem, vel ſimiles partes eſſe antecedentium magnitudinum, adeoque quatuor propoſitas magnitudines proportionales eſſe. Quod ſi in quartâ magnitudine non ſeptem partes ejuſmodi accuratè, & exactè continerentur, ſed aliquid aliud ſupereſſet, aut deeſſet, tunc quatuor magnitudines ipſa proportionales minimè forent; ſed eadem quarta magni-* Fig. V.

gnitudo paullo major, aut minor eſſet, quàm ut contineri poſſet a tertiâ eodem modo, quo ſecunda continetur a primâ; ſive, ut quarta haberet ad tertiam eandem rationem, quam habet ſecunda ad primam.

Quod ſi priores duæ magnitudines, prima nimirum, & ſecunda, incommenſurabiles forent, quemadmodum exprimi certè non poteſt modus, aut ratio, quâ una continetur ab aliâ, ita nec etiam exprimi poterit ſimilitudo rationum, quæ inter quatuor magnitudines reperitur.

Facilè tamen oſtendi poterit ſimilitudinem illam rationum etiam in incommenſurabilibus reperiri. Sint enim tam magnitudines A B, C D, *quàm* E F, G H *incommenſurabiles inter ſe, atque abſcindatur ex* C D *aliqua pars* C I, *quæ commenſurabilis ſit ipſi* A B; *ſitque communis illarum menſura* M; *quemadmodum abſciſsâ* G K, *quæ ſit eadem, vel ſimilis pars magnitudinis* E F, *ac* C I *magnitudinis* A B, *ſit communis illarum menſura* N. *Facilè apparet, quod ſi bifariam ſemper dividantur communes menſuræ* M, N, *reperientur aliæ communes menſuræ* O, P *minores exceſſibus, vel differentiis* I D, K H; *unde ex conſequentibus* C D, G H *auferri poterunt aliæ partes, quæ menſurentur a novis menſuris* O, P, *& ſimiles ſint inter ſe, & commenſurabiles propriis antecedentibus, atque majores ſint partibus ſimilibus ablatis* C I, G K; *hoc eſt quæ propiùs ſemper accedant ad eaſdem datas magnitudines* C D, G H, *ſive differant, vel deficiant ab ipſis defectu ſemper minori. Quod cùm ſemper ac ſemper fieri poſſit, donec magnitudines* C D, G H *exhauriantur, hoc eſt donec ſuperſit aliqua magnitudo, vel differentia, quæ inſenſibilis,*

lis, ac indefinitè parva ſit, ſi ſemper in utrâque magnitudine CD, GH *pari paſſu, vel ſerie ejuſmodi partes ſimiles ſemper, ac ſemper majores auferri poſſint, ita ut dum aliquid ſupereſt in unâ* CD, *ſemper etiam aliquid ſuperſit in aliâ* GH, *ſicque in infinitum, tunc optimè inferri poterit, quod tota* CD *ſit ſimilis, aut eadem pars magnitudinis* AB, *ac tota* GH *eſt magnitudinis* EF; *ſive quod* CD *eodem, vel ſimili modo contineatur in* AB, *quo* GH *continetur in* EF. *Quod ſi tandem in unâ* CD *aliquid ſupereſſet, in aliâ verò nihil omnino ſupereſſet, vel etiam deeſſet, ut idem numerus partium, qui ex* CD *ablatus fuerat, etiam ex* GH *auferretur, tunc diceretur eadem* CD *paullo major eſſe, quàm ut contineri poſſit in* AB *eodem, vel ſimili modo, quo* GH *continetur in* EF.

Cùm itaque dari, vel inveniri poſſit aliqua magnitudo GK, *ex quâ totidem partes auferri non poſſint, quot ex aliâ magnitudine* CD *ablata jam fuerint; & inſuper alia magnitudo* GL *ex quâ plures partes auferri poſſint quàm ex aliâ* CD *ablata fuerint; manifeſtum eſt inter magnitudines* GK, *&* GL, *quæ inter ſe exceſſu ſemper minori differre poſſunt, magnitudinem aliquam reperiri, quæ totidem ſemper partes contineat, quot in* CD *continentur, adeoque contineatur in* EF *eodem, vel ſimili modo, quo* CD *continetur in* AB.

POSTULATUM.

SI duæ rationes inæquales, ſive diſſimiles fuerint, ſit nempe prima magnitudo paullo major, aut minor, quàm ut habere poſſit ad ſecundam eandem rationem, quam habet tertia ad quartam, concipi poterit aliqua alia magnitudo major, aut minor eâdem primâ, quæ ſit ad ſecundam, ut eſt tertia ad quartam. Quemadmodum propoſitis tribus magnitudinibus aſſignari, vel concipi poterit quarta magnitudo, ad quam tertia propoſita magnitudo eandem habeat rationem, quam habet prima ad ſecundam.

AXIOMATA.

I.

Eucl. *7. V.* Fig. I. SI duæ magnitudines A, B æquales fuerint, ad eandem magnitudinem C, vel ad æquales magnitudines C, D, æqualem, vel eandem rationem habebunt. Et eadem magnitudo C, vel æquales magnitudines C, D, ad æquales alias magnitudines A, B eandem rationem habebunt.

II.

Eucl. *9. V.* Atque ſimiliter e converſo ſi duæ magnitudines A, B ad eandem magnitudinem C, ſive ad æquales magnitudines C, D, eandem rationem habuerint, erunt æquales. Sicuti etiam ſi ipſa C, ſive duæ æquales C, D, ad utramque

ma-

magnitudinem A, B eandem rationem habuerint, magnitudines ipſæ A, B æquales erunt.

III.

Si verò A, B inæquales fuerint, tunc illarum major, ex. gr. A, paullo major erit, quàm ut habere poſſit ad C eandem rationem, quam habet alia magnitudo minor B ad eandem C, vel ad ipſi æqualem D; unde A majorem rationem habere dicetur ad C, quàm habeat B ad eandem C, vel ad D; ſicuti eadem magnitudo C, vel D, quia paullo minor eſt, quàm ut habere poſſit ad A eandem rationem, quam habet ad B, dicetur C, vel D habere minorem rationem ad magnitudinem majorem A, quàm ad minorem B. *Eucl. 8. V.*

IV.

Et e converſo ſi major fuerit ratio ipſius A ad C, quàm B ad C, ſive ad D; aut ſi minor fuerit ratio C ad A, quàm C, ſive D ad B, tunc magnitudo A major erit magnitudine B. *Eucl. 10. V.*

V.

Cùm autem ratio primæ magnitudinis A ad C tantò major ſit ratione alterius magnitudinis B ad eandem C quantò major eſt A ipſâ B: ſive cùm modus, quo A continet C, vel continetur ab illâ, tantò diverſus ſit a modo, quo B continet C, vel continetur ab illâ, quantò magnitudo A diverſa eſt a magnitudine B, dicetur optimè quod ratio ipſius A ad C eſt ad rationem alterius magnitudinis B ad eandem C, ut eſt A ad B.

VI.

Unde rationes illæ, quæ communem, ſive æqualem conſequentem habent, erunt inter ſe, ut illarum antecedentes.

VII.

Contra verò, ſi inter ſe comparentur rationes alicuius magnitudinis C ad inæquales magnitudines A, B, ratio C ad majòrem magnitudinem A tantò minor erit ratione ipſius C ad minorem magnitudinem B quantò B minor eſt ipsâ A, ſive quantò A major eſt ipsâ B.

VIII.

Unde rationes illæ, quæ communem, ſive æqualem antecedentem habent, erunt inter ſe ut illarum conſequentes inversè, vel reciprocè ſumpti.

IX.

Eucl. Poſtremò rationes illæ, quæ eidem rationi,
11. V. ſive ſimilibus, ac iiſdem rationibus ſimiles ſunt,
Figura inter ſe quoque ſimiles, aut æquales erunt.
II. Ut ſi fuerit tam ratio A ad B, quàm ratio C ad D ſimilis, aut eadem ac ratio E ad F, rationes A ad B, & C ad D inter ſe quoque ſimiles erunt.

X.

At ſi una quidem ratio, ut A ad B, fuerit ſimilis rationi ipſius E ad F, altera verò ratio C ad D non fuerit illi ſimilis, rationes A ad B, & C ad D inter ſe ſimiles eſſe non poterunt.

XI.

Eucl. Quemadmodum etiam ſi duæ rationes ad eandem
13. V. rationem eundem reſpectum, ſive rationem habuerint, ſimiles, aut æquales erunt inter ſe. Ut ex. gr. ſi ratio A ad B fuerit ad rationem E ad F, ut ratio C ad D eſt ad eandem rationem E ad F, ratio A ad B ſimilis erit, aut eadem cum ratione C ad D. *Intelligatur enim ut* A *ad* B, *ita* E *ad* G; *atque ut* C *ad* D, *ita*

E *ad*

E *ad* H; *eritque* (a) *ratio* E *ad* G *ad rationem* E *ad* F, *hoc eſt* F *erit ad* G, *ut ratio* E *ad* H *ad eandem rationem* E *ad* F, *hoc eſt ut* F *ad* H, *adeoque* (b) G, *&* H *inter ſe æquales erunt; eritque* (c) *ratio* E *ad* G, *hoc eſt ex hypotheſi* A *ad* B, *eadem ac ratio* E *ad* H, *nempe ratio* C *ad* D.

a *Ex hypoth.* b *Ax.* 2. c *Ax.* 1.

XII.

Aut e converſo ſi duæ rationes æquales inter ſe fuerint, ad eandem rationem, vel ad æquales etiam rationes eundem ordinem, ſive rationem habebunt.

XIII.

Si duæ magnitudines A, B duarum magnitudinum C, D æquè multiplices fuerint, ſive ſi C, D ſimiles partes fuerint duarum magnitudinum A, B, erit A ad C, ut B ad D; vel C ad A, ut D ad B.

Figura III.

XIV.

Inſuper ſi duæ magnitudines AB, CD, in totidem æquales partes dividantur, erit integra magnitudo AB ad partem EB, ut integra CD ad partem ſimilem FD; ſive integra magnitudo AB ad aliquas partes BE, EI ut integra magnitudo CD ad totidem partes DF, FG: atque eadem AB ad reliquas partes AI, IE ſeparatim, vel etiam ſimul ſumptas, ut tota CD ad reliquas partes CG, GF ſimiliter ſeparatim, aut ſimul ſumptas.

Figura IV.

XV.

Quemadmodum etiam ſi magnitudines illæ AB, CD, homogeneæ fuerint, ut ex. gr. lineæ, & in totidem æquales partes diviſæ, erit pars aliqua EB ad partem ſimilem FD, ut tota magnitudo AB ad totam CD.

Euclid. 15. 4. *V.*

PROPOSITIONES.

I.

Euclid. 22. 3 20. V. Figura VI. *SI fuerint duo ordines magnitudinum, ſitque* A *prima unius ordinis ad ſecundam* B *ut* C *prima alterius ordinis ad ſecundam* D; *& ſecunda* B *ad tertiam* E *ut ſecunda* D *ad tertiam* F, *erit ex* æqualitate ordinatâ *prima unius ordinis ad tertiam, hoc eſt* A *ad* E, *ut prima alterius ordinis ad tertiam, hoc eſt ut* C *ad* F.

Ratio A ad E eſt ad rationem B ad E, ut eſt A ad B (a), ſicuti ratio C ad F eſt ad rationem D ad F, ut C ad D; ſed ex hypotheſi A eſt ad B ut C ad D, ergo ratio A ad E, erit ad rationem B ad E, ut ratio C ad F, eſt ad rationem D ad F; ſed ex hypotheſi ratio conſequens B ad E eadem, ſimilis, & æqualis eſt rationi conſequenti D ad F, ergo (b) etiam rationes antecedentes A ad E; & C ad F ſimiles, & æquales erunt, hoc eſt erit A ad E, ut C ad F.

a Ax. 6.

b Ax. 11.

II.

Euclid. 23. 21. V. *Si in duobus ordinibus magnitudinum fuerit* A *prima unius ordinis ad ſecundam* B, *ut* D *ſecunda alterius ordinis ad tertiam* F; *&* B *ſecunda primi ordinis ad tertiam* E, *ut* C *prima alterius ordinis ad ſecundam* D, *erit ex* æqualitate perturbatâ *prima unius ordinis ad tertiam,*

ut

ut prima alterius ordinis ad tertiam, hoc eſt A *ad* E, *ut* C *ad* F.

Ratio inter A, & E eſt ad rationem inter B, & E, ut A ad B (a); ſicuti ratio inter C, & F eſt ad rationem inter C, & D eſt ut D ad F (b); ſed ex hypotheſi A eſt ad B, ut D ad F; ergo ratio inter A, & E eſt ad rationem inter B, & E, ut ratio inter C, & F eſt ad rationem inter C, & D; ſed ex hypotheſi ratio inter B, & E ſimilis, & eadem eſt cum ratione inter C, & D, ergo (c) etiam rationes antecedentes inter A, & E, atque inter C, & F ſimiles, & æquales erunt, hoc eſt erit A ad E, ut C ad F.

a *Ax.* 6.
b *Ax.* 8.
c *Ax.* 11.

III.

Verificatur hoc etiam ſi quotcumque magnitudines in utroque ordine, pares tamen numero, ſupponantur.

Semper enim erit A ad E, ut C ad F; & E veluti ſecunda ad tertiam G, ut F veluti ſecunda alterius ordinis ad tertiam H, ideoque ex æqualitate, ſive ordinatâ, ſive perturbatâ erit prima A ad ultimam G, ut prima C ad ultimam H.

IV.

Si fuerit prima A *ad ſecundam* B *ut tertia* C *ad quartam* D, *erit* invertendo *ſecunda* B *ad primam* A, *ut quarta* D *ad tertiam* C. Figura VII.

Concipiatur enim E, quæ ſit æqualis ipſi B, & F, quæ ſit æqualis ipſi D. Ratio inter B, & E ad rationem inter A, & E eſt ut ratio inter D, & F ad rationem inter C, & F (d), cùm ex hypo-

d *Ax.* 12.

hypotheſi homologæ rationes, hoc eſt antecedentes inter ſe, & conſequentes ſimiliter inter ſe æquales ſint; ſed ratio inter B, & E ad rationem inter A, & E eſt ut B ad A; atque ſimiliter ratio inter D, & F ad rationem inter C, & F eſt ut D ad C, ergo B erit ad A, ut D ad C.

V.

Eucl. 16. 14. *V.* Figura VIII. *Si fuerit prima* A *ad ſecundam* B, *ut tertia* C *ad quartam* D, *erit* alternando, ſeu permutando A *ad* C, *ut* B *ad* D.

Ratio inter A, & B ad rationem inter C, & B eſt ut ratio inter C, & D, ad rationem inter C, & B (a), cùm antecedentes rationes A ad B, & C ad D æquales ſint, & ratio conſequens inter C, & B ſit communis, & eadem; ſed ratio inter A, & B ad rationem inter C, & B eſt ut A ad C; atque ſimiliter ratio inter C, & D ad rationem inter C, & B eſt ut B ad D, ergo A ad C erit ut B ad D.

a *Ax.* 12.

VI.

Eucl. ex 19. *V.* Figura IX. *Si fuerit tota magnitudo* AB *ad ablatam partem* BC *ut tota magnitudo* DE *ad ablatam partem* EF, *erit per* converſionem rationis *tota magnitudo* AB *ad reliquam ſui partem* AC *ut tota magnitudo* DE *ad reliquam ſui partem* DF.

Niſi etenim ſit AB ad AC, ut DE ad DF, una ex conſequentibus ex. gr. AC major erit, quàm ut AB habere poſſit ad ipſam eandem rationem, quam habet DE ad DF. Ponatur itaque

que ut D E ad D F, ita A B ad aliam A G (a), a *Poſt.*
quæ proinde ſit minor ipſâ A C; aſſumaturque
particula B I (b) minor differentiâ C G, ut accipi b *De-*
proinde poſſit B O multiplex ejuſdem particulæ *fin.* 13.
B I; quæ multiplex B O major quidem ſit ipſâ
B C, ſed minor ipſâ B G, ideoque relinquat
O A majorem ipſâ A G. Aſſumatur etiam in magnitudine D E particula E H, quæ ſit eadem, vel ſimilis pars totius D E, ac particula B I eſt totius A B, & tam multiplex ponatur E V ipſius E H, quàm multiplex eſt B O ejuſdem B I.

Cùm itaque ſit (c) A B ad B I ut D E ad E H; c *Ax.*
& B I ad B O, ut E H ad E V, erit ex æquo 14.
A B ad B O, ut D E ad E V; & invertendo B O ad A B, ut E V ad D E: ſed ut A B ad B C, ita D E ad E F, ergo ex æquo B O erit ad B C, ut E V ad E F; adeoque, ſicuti B O major ponitur ipſâ B C, etiam E V major erit ipſâ E F: ſive D F major erit ipſâ D V. Deinde verò cùm fuerit A B ad B O ut D E ad E V,
erit (d) etiam A B ad reliquam A O ut D E ad d *Ax.*
reliquam D V; vel invertendo erit A O ad 14.
A B ut D V ad D E; ſed A B ad A G erat ut D E ad D F, ergo ex æquo A O ad A G erit ut D V ad D F; ſed D V eſt minor ipſâ D F, ergo etiam A O minor erit ipſâ A G, quod eſt impoſſibile, ergo ſi fuerit A B ad B C, ut D E ad E F, erit per converſionem rationis A B ad A C, ut D E ad D F.

VII.

Si fuerit A B *ad* B C, *ut* D E *ad* E F, *Eucl.*
erit etiam dividendo A C *ad* C B *ut* 17. *V.* Figura
D F *ad* F E. X.

Quia

Quia eſt tota A B ad ablatam partem B C, ut tota D E ad ablatam partem E F, erit etiam per converſionem rationis tota A B ad reliquam partem A C, ut tota D E ad reliquam D F, & invertendo A C ad A B, ut D F ad D E; ſed A B erat ad B C, ut D E ad E F, ergo ex æquo erit A C ad C B, ut D F ad F E.

VIII.

Eucl. 18. V. *Si fuerit* A C *ad* C B *ut* D F *ad* F E, *erit & componendo* A B *ad* B C *ut* D E *ad* E F.

a Poſt. Niſi etenim foret, fiat (a) ut D E ad E F ita X B ad B C; ergo dividendo foret ut D F ad F E, ſive ex hypotheſi ut A C ad C B, ita X C ad eandem C B, adeoque X C eſſet æqualis ipſi A C, quod repugnat.

IX.

Eucl. 12. I. V. Figura XI. *Si fuerint quotcumque magnitudines antecedentes* A, B, C, D, *& totidem aliæ conſequentes* M, N, O, P; *ſitque prima antecedens* A *ad primam conſequentem* M, *ut ſecunda* B *ad ſecundam* N, *atque ita deinceps, erunt* colligendo *omnes ſimul antecedentes ad omnes ſimul conſequentes, ut prima antecedens* A *ad primam conſequentem* M.

Quia ex hypotheſi A ad M eſt ut B ad N, erit permutando A ad B, ut M ad N, & componendo A ſimul cum B erit ad B, ut M ſimul cum N ad N; ſed B eſt ad N ut C ad O, permutandoque B eſt ad C, ut N eſt ad O,

ergo

ergo ex æquo A ſimul cum B erit ad C, ut M ſimul cum N ad O; adeoque iterum componendo tres ſimul A, B, C erunt ad C ut tres ſimul M, N, O ad O; atque ita ſemper: ergo omnes ſimul antecedentes erunt ad ultimam D, ut omnes conſequentes ſimul ad ultimam P; & permutando omnes antecedentes ſimul erunt ad omnes ſimul conſequentes, ut ultima antecedens ad ultimam conſequentem, ſive ut prima ad primam.

Ex hoc Theoremate veluti ex uberrimo fonte Indiviſibilium Geometria *a Galileo primùm, & Torricellio adhibita, tum a Cavalerio mirificè illuſtrata, & confirmata profluxit. Cùm etenim in hac Indiviſibilium methodo ſuperficies ex lineis, & corpora ex ſuperficiebus componi concipiantur; ubi inter ſingulas, pareſque numero duarum ſuperficierum lineas, ſive duorum corporum ſuperficies certa quadam, & conſtans ratio perpetuò deprehendatur, optimè inferri poteſt, quod etiam omnes lineæ unius ſuperficiei ſimul ſumpta, hoc eſt eadem prima ſuperficies, erunt ad omnes lineas alterius ſuperficiei ſimul ſumptas, hoc eſt ad alteram ſuperficiem, ut prima linea unius ſuperficiei eſt ad primam alterius; quemadmodum etiam ſuperficies omnes in uno corpore, hoc eſt corpus ipſum, erit ad omnes alterius corporis ſuperficies, hoc eſt ad aliud corpus, ut prima unius corporis ſuperficies ad primam alterius. Exempla frequentiſſimè occurrent: interim, ſi libeat, Fig. 9. Tab. III. aut ipſa Prop. I. lib. VI. conſulatur.*

Si

X.

Eucl. 24. 2. 6. V. Figura XIII. *Si in duobus ordinibus magnitudinum fuerit* AC *ad* G *ut* DF *ad* H; *atque inſuper* CB *ad eandem* G *ut* FE *ad eandem* H, *ſive invertendo* G *ad* CB *ut* H *ad* FE, *erit* conjungendo *utraque ſimul* AC, CB *ad* G, *ut utraque ſimul* DF, FE *ad* H.

Quoniam AC eſt ad G, ut DF ad H; atque ſimiliter eſt G ad CB ut H ad FE, erit ex æquo AC ad CB, ut DF ad FE, & componendo AB ad BC ut DE ad EF; ſed BC erat ad G ut EF ad H, ergo iterum ex æquo AB erit ad G ut DE ad H.

XI.

Eucl. 19. & 5. V. Figura XII. *Si fuerit tota* AB *ad totam* DE *ut pars ablata* AC *ad partem ablatam* DF, *erit* detrahendo *etiam reliqua pars* CB *ad reliquam partem* FE, *ut tota* AB *ad totam* DE.

Cùm etenim ſit AB ad DE ut AC ad DF; erit permutando AB ad AC, ut DE ad DF; & dividendo BC ad CA, ut EF ad FD; atque iterum permutando BC ad EF ut CA ad FD, hoc eſt reliqua pars CB ad reliquam FE ut ablata AC ad ablatam DF, vel ex hypotheſi, ut tota AB ad totam DE.

Si

XII.

Si quatuor magnitudinum proportionalium AB, CD, E, F *maxima fuerit* AB, *minima verò* F, *erunt maxima, & minima ſimul ſumptæ majores intermediis* CD, E. Euclid. 25. V Figura XIV.

Auferatur ex maximâ AB pars AG æqualis ipſi E, & ex CD pars CI æqualis ipſi F. Quoniam itaque eſt AB ad CD ut E ad F, hoc eſt ut ablata pars AG ad ablatam CI, erit & reliqua pars GB ad reliquam ID ut tota ad totam (a); adeoque ſicuti AB major eſt ipsâ CD (b), ita reliqua pars GB major erit reliquâ ID; Si igitur æqualibus partibus AG, & E adjiciantur æquales partes F, & CI, erunt duæ AG, & F æquales duabus E, CI: ergo ſi duabus AG, F adiiciatur reliqua pars major GB, & duabus E, CI reliqua pars minor ID, erit maxima AB cum minimâ F major intermediis CD, E.

a Ex antec.

b Ex hypoth.

LIBER

LIBER II.

De Magnitudinum Rationibus inter ſe comparatis, ſive de variis Rationum Affectionibus, illarumque Progreſſionibus.

I. CUm Rationes illæ, vel habitudines, quæ inter aliquas magnitudines reperiuntur, veluti magnitudines aliquæ concipi, aliarumque magnitudinum inſtar inter ſe conferri poſſint; manifeſtiſſimè apparet, quod Rationes ipſæ proprietates omnes, vel affectiones ſortiuntur, quæ in ceteris magnitudinum generibus obſervantur. Quemadmodam itaque una magnitudo, ſi cum aliâ comparetur, major, æqualis, aut minor vocatur, ita quoque una Ratio reſpectu alterius major, æqualis, aut minor optimè dici poteſt, ut in ſuperiori libro demonſtravi. Similiter etiam, ſicuti duarum magnitudinum una cum aliâ conjungi; una ex aliâ detrahi; una per aliam dividi; una denique per aliam multiplicari dicitur, ita quoque Rationes ipſæ conjungi, detrahi, dividi, multiplicari dicuntur; quæ ſingula in hoc altero libro breviter quidem, ſed,

quoad

quoad fieri potuit, accuratè complectar. Quandoquidem verò proprietates illæ frequentiùs in numeris adhiberi, atque faciliùs, & uberiùs in illis intelligi poſſunt, primùm quidem de numeris ipſis, ſive de illorum rationibus inter ſe collatis; deinde verò de ſingulis magnitudinum generibus differam.

1. Numerus itaque cum alio numero conjungi, vel numerus aliquis alteri numero addi dicitur, cum omnes unius numeri unitates cum omnibus alterius numeri unitatibus conjunguntur, numerantur, ut ex omnibus utriuſque numeri unitatibus unà collectis alter quidam numerus utrique æqualis reſultet, qui proinde *ſumma*, vel *aggregatum* vocatur; ut ſi numerus 6 addatur numero 8 reſultabit 14 æqualis ipſis 6, & 8 ſimul ſumptis.

2. Numerum ex numero detrahere nihil eſt aliud, quàm omnes unius numeri unitates ex alterius majoris numeri unitatibus ſubducere, hoc eſt totidem unitates ex majori numero auferre, quot ſunt unitates in minori. Minor ipſe numerus *detractus*, *ablatus* vocatur: is verò, qui poſt detractionem ſupereſt in majori, vocatur *reliquus*, ſive *reſiduus*.

3. Numerus aliquis alium numerum dividit cum aliquoties ex illo aufertur, exprimiturque quoties, aut quomodo in illo contineatur, vel ex illo auferatur; ut numerus 3 dividit numerum 12 cum ex illo aufertur quoties poteſt, hoc eſt quoties in illo continetur; exprimiturque numerum 3 quater in 12 contineri. Hinc in numerorum diviſione præter numerum *dividendum* numerus alter *diviſor* requiritur, atque

inſuper alter numerus reſultat, qui *Quotiens* vocatur, hoc eſt ille numerus, qui exprimit quoties diviſor in dividendo, vel diviſo numero continetur.

4. Numerus denique in alium numerum duci, ſive numerum multiplicare dicitur cum toties unus ex illis ſumitur quoties unitas in alio contineatur; ſive cum tertius quidam numerus ſumitur, qui toties multiplex ſit numeri multiplicati, quoties numerus alter multiplicans multiplex eſt unitatis. Tertius ille numerus eâ ratione inventus *productus* vocatur. Quod ſi numerus aliquis in ſeipſum ducatur, ſive toties ſumatur, quot in ſe continet unitates, tunc numerus ille inde productus *quadratus* dicitur; numerus autem ille, ex cujus multiplicatione producitur, vocatur ejus *radix*.

Quod ſi ulteriùs eadem radix quadratum numerum a ſe productum multiplicet, numerus inde productus vocatur *cubus* ejuſdem radicis.

II. Quæ verò de numeris dicta ſunt, intelligi, & applicari facilè poſſunt ceteris magnitudinum generibus, iiſque præſertim, quæ commenſurabiles inter ſe fuerint; illis nimirum, quæ inter ſe fuerint ut numerus aliquis ad alium numerum.

1. Tunc itaque una magnitudo cum aliâ conjungi dicitur cum utraque ſimul unitur, hoc eſt utriuſque partes omnes, & extenſio, vel quantitas unicam extenſionem, aut quantitatem efficere, vel componere concipiuntur.

2. Detrahitur verò magnitudo ex aliâ magnitudine cum tot partes, vel tanta magnitudo auferatur ex majori, quanta eſt minor magnitudo,

do, vel quot partes in minori magnitudine continentur.

3. Dividitur magnitudo per magnitudinem cum ex majori toties minor aufertur, quoties in illâ continebatur.

4. Multiplicari denique dicitur una magnitudo per aliam, ſive una in aliam duci cum aſſumptâ aliquâ magnitudine tanquam unitate, vel inſtar unitatis, fiat ut hæc aſſumpta magnitudo, vel unitas, ad magnitudinem multiplicantem ita magnitudo multiplicata ad quartam aliam magnitudinem, quæ *producta* vocatur.

III. Atque iſta quidem, quæ de variis magnitudinum generibus explicavimus, ad rationes ipſas, quas magnitudinum inſtar haberi poſſe jam diximus, nullo negotio transferri poſſent, niſi diſcrimen illud inter rationes, ac cetera magnitudinum genera reperiretur, quod cujuslibet magnitudinis quantitas abſoluta eâdem ipsâ magnitudine exprimitur; quantitas autem, vel magnitudo rationis, quæ inter duas magnitudines reperitur, duabus etiam magnitudinibus exprimi debet; adeoque, ut eadem ratio cum aliâ ratione conjungatur &c., non ſufficit, ut alterutra magnitudo, vel terminus rationis, ex. gr. antecedens, cum alio antecedente conjungatur, ſed habenda eſt inſuper ratio conſequentium, ſive conſiderandi ſunt etiam omnes alii termini, quibus rationes illæ exprimuntur. Sic in ſubjectis numeris ratio 9 ad 26 certè non eſt æqualis duabus rationibus 5 ad 10, & 4 ad 16 ſimul ſumptis, quamvis antecedentes ſimul, ſimulque conſequentes conjuncti, ſive collecti

fuerint; ut antecedentem 9, & conſequentem 26 componerent.

5	4	9
10	16	26

IV. Illud itaque initio præſtandum erit, ubi rationes aliquæ conjungendæ, dividendæque fuerint, ut unicâ magnitudine quælibet ratio exprimatur, quâ deinde magnitudine diviſâ, conjunctâ &c. eadem quoque ratio dividi, conjungi concipiatur. Id verò fieri facilè poterit ſi rationes propoſitæ, quæ diverſos plerumque, ac inæquales conſequentes habent; ad communem, ſive eundem conſequentem reducantur. Tunc etenim rationes illæ erunt (a) inter ſe ut illarum antecedentes.

a *Ex ax.* 6. *lib. I.*

Figura XV. Sit ex. gr. rationes A ad B, C ad D, quæ diverſos habeant conſequentes B, & D. Fiat ut A ad B ita E ad D: eritque ratio inter A, & B, ſive inter E, & D ad rationem inter C, & D ut E ad C, adeoque rationes illæ duabus magnitudinibus E, & C exprimuntur. Quoties itaque minui, augeri, conjungi, dividi &c. contigerit magnitudines E, C toties minui, augeri concipientur rationes inter E, & D, ſive inter A, & B, atque inter C, & D.

1. Ut itaque duæ rationes ſic ad communem conſequentem reducantur, & inter ſe conjungantur, illarum antecedentes conjungi debent; eritque ratio illorum ſummæ ad eumdem communem conſequentem collecta, ſive conjuncta ex rationibus propoſitis.

2. Si primum antecedens detrahatur ex ſecundo, prima ratio detrahetur ex ſecundâ.

3. Si

3. Si primum antecedens dividat ſecundum, prima ratio dividet ſecundam.

4. Si denique primum antecedens multiplicans ſecundum produxerit aliam magnitudinem, ratio hujus magnitudinis productæ ad communem conſequentem erit producta ex datis rationibus inter ſe multiplicatis

V. Ceterum ex variis Rationum proprietatibus, quas hactenus enumeravi, nulla apud Geometras illuſtrior, ac utilior eſt, quàm Rationum multiplicatio, quæ ab ipſis etiam *Compoſitio* vocatur. Quæ quidem rationum compoſitio, etſi a veteribus etiam Geometris Euclide, Apollonio, Archimede uſurpata fuerit, illius tamen vis, & ratio, nonniſi leviter, obſcurè, ac imperfectè, fuit ab illis expoſita.

Ut itaque rationum compoſitio clariùs, & uberiùs oſtendatur, atque deinde faciliùs intelligantur ea, quæ de compoſitionis ejuſdem proprietatibus oſtendentur, juverit hìc aliam illius definitionem exponere, ſive potiùs modum alium indicare, quo duæ propoſitæ rationes, etſi ad communem conſequentem antea reductæ non fuerint, inter ſe duci, ac multiplicari poſſint.

VI. Quemadmodum itaque numerus aliquis in alium numerum duci, ſive ipſum multiplicare dicitur cum fit ut unitas ad primum numerum multiplicantem ita numerus alter multiplicatus ad quartum quemdam numerum, qui *productus* vocatur; ſic etiam ratio duarum magnitudinum multiplicare dicitur rationem duarum aliarum magnitudinum cum fit ut ratio unitatis ad unitatem, hoc eſt ratio æqualitatis, ad primam ra-

tionem multiplicantem ſic altera ratio multiplicata ad quartam aliam rationem. Ut itaque
Figura XVIII. ex. gr. multiplicetur ratio magnitudinis A ad B cum ratione magnitudinis C ad D, fieri debet ut ratio unitatis ad unitatem, ſive ut ratio æqualitatis, ad rationem multiplicantem inter A, & B ita ratio multiplicata inter C, & D ad aliam rationem inter E, & D, quæ *producta* dicetur. Id verò fieri facilè poterit, ſi aſſumptâ magnitudine G, quæ ſit equalis ipſi B, fiat ut G ad A ita C ad E; tunc etenim ratio G
a *Ax.* 6. 1. ad B, nempe ratio æqualitatis, eſſet (a) ad rationem multiplicantem inter A, & B ut G ad A, hoc eſt ex hypotheſi ut C ad E, ſive ut ratio multiplicata inter C, & D ad rationem productam inter E, & D.

Hæc autem ratio E ad D, quæ ex rationibus A ad B, & C ad D inter ſe ductis reſultat, ſive producitur, ex rationibus ipſis *compoſita* dicitur, non quòd in illâ rationes multiplicatæ, veluti ſimul conjunctæ, & collectæ reperiantur, ut *compoſitionis* nomen innuere videtur; verùm potiùs quòd ab illis inter ſe ductis efformetur.

VII. Hæc altera multiplicatæ, ſive compoſitæ rationis definitio, quamvis ab aliâ ſuperiùs traditâ differre videatur, pulcherrimè tamen cum illâ convenit, & ex ipsâ numerorum, aliarumque magnitudinum analogiâ, rationum quoque compoſitionem, ſive multiplicationem exprimit, unde in utroque caſu, vel juxta utramque definitionem ſemper eadem ratio compoſita, ſive multiplicata reſultat.

Figura XX. Si etenim juxta primam definitionem ponatur ut C ad D ita F ad B, aſſumaturque conſe-

ſequens B tanquam unitas, & fiat ut B, vel G ad A, ita F ad O, erit ratio inter O, & B compoſita ex rationibus A ad B, & F ad B, ſive C ad D.

At juxta ſecundam definitionem erit ſimiliter ut G ad A, ita C ad E, adeoque ratio E ad D compoſita ex datis rationibus A ad B, & C ad D. Quod autem ratio compoſita O ad B ſit eadem ac ratio compoſita E ad D manifeſtiſſimè apparet: eſt enim O ad F ut A ad G, vel ut E ad C; & F ad B ut C ad D, unde ex æquo erit O ad B ut E ad D. Secundâ tamen definitione inferiùs utemur, tum quòd clarior appareat, tum etiam quia univerſalior eſt, videturque ſimpliciùs numerorum multiplicationem imitari. Figura XVIII.

VIII. His itaque ſuppoſitis celeberrimum illud Theorema facillimè demonſtrabo, quod a veteribus nonniſi in numeris, magnitudinibuſque commenſurabilibus demonſtratum eſt, ut apud Clavium videri poterit; quodque Galileus ipſe non ſolùm non probavit, verùm etiam in illius vi, ſenſuque exponendo minùs feliciter, quàm a præſtantiſſimo viro exoptandum fuerat, fortaſſe ſtuduit; cùm præſertim rationes illas compoſitas aſſerere exiſtimetur, quæ non inter ſe ductæ, ſed unitæ, collectæque ſimpliciter ſint; ut proinde conjunctionem cum compoſitione, ſive multiplicatione rationum confundere videatur, eximius verò Geometra Gregorius a S. Vincentio inter principia numerandum arbitrabatur, donec alicui illius demonſtratio occurreret, quod omnium primo Andreæ Tacqueto illuſtri, clariſſimoque Geometræ feliciter contigit.

I.

Figura XVIII. *Si fuerint tres magnitudines* A, B, D, *dico quod ratio primae magnitudinis* A *ad tertiam* D *componitur ex rationibus primae* A *ad ſecundam* B, *& ſecundae* B *ad tertiam* D.

Intelligatur enim magnitudo C æqualis ipſi B, atque ita magnitudines diſponantur, ut A, & C ſint duarum rationum antecedentes; B, & D earundem rationum conſequentes; aſſumptâque G, quæ ſit æqualis ipſi B, vel C, fiat ut G ad A, ita C, ſive eadem G ad E, eritque (a) E æqualis ipſi A, ſicuti C æqualis eſt ipſi G, adeoque (b) ratio ipſius E ad D æqualis erit, aut eadem ac ratio primæ A ad tertiam D; ſed ratio E ad D componitur ex rationibus A ad B, & C ad D, cùm ex hypotheſi ſit G ad A, ut C ad E, ſive ſit ratio æqualitatis inter G, & B ad rationem multiplicantem inter A, & B; ut ratio multiplicata inter C, & D ad rationem productam inter E, & D, ergo etiam ratio ipſius A ad D componetur ex rationibus primæ A ad ſecundam B, & ſecundæ B, ſive C ad tertiam D.

a Def. 21. I.

b Ax. 1. I.

Figura XXI. Sive breviùs. Ratio C ad B, nempe ratio unitatis ad unitatem, ſive ratio æqualitatis, eſt (c) ad rationem multiplicantem inter A, & B, ut C ad A; ſed ut eadem C ad A eſt etiam alia ratio multiplicata inter C, & D ad aliam rationem inter A, & D, ergo hæc eadem ratio A ad D producetur, ſive componetur ex rationibus ipſis A ad B, & C ad D inter ſe ductis.

c Ax. 6. I.

II. *Si*

II.

Si ratio A *ad* B *ſimilis, aut aequalis ſit rationi* M *ad* N; *& alia ratio* C *ad* D *ſimilis, & aequalis alteri rationi* O *ad* P, *etiam ratio inter* E, *&* D, *quae ex duabus primis rationibus componatur, ſimilis, & aequalis erit rationi inter* V, *&* P, *quae componatur ex duabus aliis: hoc eſt rationes illae, quae ſimilibus rationibus componuntur, inter ſe quoque ſimiles erunt.* Figura XVIII. XIX.

Quoniam A eſt ad B, ut M ad N, erit (a) invertendo B, vel G ad A ut N, vel L eſt ad M; ſed ut G ad A ita C ad E; & ut L ad M, ita O ad V, ergo C erit ad E, ut O ad V, invertendoque E ad C ut V ad O; ſed C erat ad D ut O ad P, ergo ex æquo E erit ad D ut V ad P, ſive A erit ad D, ut M ad P. a 4. I.

III.

Quod ſi rationes componentes, inaequales forent, ut ex. gr. ſi ratio O *ad* P *major foret ratione* C *ad* D, *etiam ratio compoſita* V *ad* P *major foret aliâ ratione compoſitâ* E *ad* D. Figura ead.

Si etenim O paullo major eſt, quàm ut habere poſſit ad P eandem rationem, quam habet C ad D, ponatur aliqua magnitudo S minor ipsâ O, quæ ſit ad P ut eſt C ad D; atque ut O ad V, hoc eſt, ut L ad M, fiat S ad T, quæ minor proinde erit (b) ipsâ V, ſi- b Defin. 21. I.

cuti

cuti S minor eſt ipſâ O; eritque ratio T ad P eadem ac ratio E ad D; ſed ratio V ad P major eſt ratione T ad eandem P, ergo major etiam erit ratione ipſius E ad D: cùm autem ratio V ad P tantò major ſit ratione T ad P, quantò major eſt V ipſâ T, vel O ipſâ S, vel ratio O ad P ratione S ad P, erit ratio producta V ad P ad rationem productam E ad D, ut ratio O ad P eſt ad rationem S ad P, hoc eſt ut O ad S, vel C ad D.

IV.

Si denique duae rationes compoſitae, ut E *ad* D, *&* V *ad* P, *ſimiles fuerint inter ſe, & alterutra ex rationibus componentibus, ut ex. gr. ratio* A *ad* B, *ſimilis fuerit uni rationi componenti* M *ad* N, *etiam altera ratio componens* C *ad* D *ſimilis erit alteri rationi componenti* O *ad* P.

Si etenim alia ratio C ad D inæqualis foret rationi O ad P, etiam ratio producta E ad D
a. ex antec. inæqualis foret (a) rationi productæ V ad P contra hypotheſim.

V.

Figura XI. *Si fuerint quotcumque magnitudines* A, B, C, D, *&c. ratio primae* A *ad ultimam* D *componitur ex rationibus intermediis* A *ad* B, B *ad* C, C *ad* D.

Ratio A ad C componitur ex ratione A ad
b 1. hujus. B, & B ad C (b); Si verò eadem magnitudo C veluti ſecunda, & D tamquam tertia concipiatur ratio A ad D componetur ex ratione A ad

C, hoc

C, hoc eſt ex rationibus A ad B, B ad C; & inſuper ex ratione C ad D; atque ita ſemper quicumque ſit numerus magnitudinum; ergo ratio primæ magnitudinis ad ultimam componetur ex omnibus rationibus intermediis.

IX. Hinc cetera, quæ de tribus magnitudinibus, ſive de duobus trium magnitudinum ordinibus hactenus demõſtravimus, de quotcũque magnitudinibus, ſive magnitudinum ordinibus oſtendi poſſunt.

Hinc etiam facilè apparet, quod ubi ratio magnitudinum ſit ſemper eadem, & continuata, hoc eſt ſit A ad B, ut B ad C, C ad D &c. ratio primæ magnitudinis ad tertiam dicetur optimè duplicata rationis primæ ad ſecundam.

Cùm enim ratio primæ magnitudinis ad tertiam componatur ex rationibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, ejuſmodi verò rationes primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam ſint ex hypotheſi ſimiles, aut eædem, erit ratio primæ ad tertiam duplicata rationis primæ ad ſecundam.

VI.

Si fuerint duae quaecumque rationes A *ad* B, *&* C *ad* D, *multiplicatiſque antecedentibus* A, C *fiat aliud antecedens* E; *multiplicatiſque ſimiliter conſequentibus* B, D *fiat aliud conſequens* F; *dico quod ratio ipſius* E *ad* F *erit compoſita ex rationibus* A *ad* B, *&* C *ad* D. Figura XVI.

Ponatur H æqualis ipſi G, vel B; atque ut C ad D, ita fiat H (a) ad K; denique ut G ad A, ſive C ad E ponatur H ad I; eritque I æqualis A, & F æqualis D. Cùm

a Poſt. lib. 1.

Cùm itaque ſit H ad I, ut G ad A, vel ex hypotheſi, ut C ad E, erit invertendo ut I ad H, ita E ad C; ſed H eſt ad K, ut C ad D; ergo ex æquo I erit ad K, ut E ad D; ſed ratio I ad K componitur ex ratione A ad B, & H ad K, ſive C ad D, ergo etiam ratio E ad D, ſive E ad F compoſita erit ex iiſdem rationibus A ad B, & C ad D.

X. Atque hinc intelligi facilè poterit definitio 5. lib. VI. Euclidis, quæ certè alioquin obſcuriſſima eſt, atque inter Theoremata veriùs, quàm inter definitiones reponenda; niſi fortaſſe illâ quoque de cauſsâ ex definitionum numero eximenda ea ſit, quòd in eo ſenſu ab Euclide nunquam fuerit uſurpata. Ejuſmodi verò eſt definitio

Ratio ex rationibus componi dicitur cum rationum quantitates, hoc eſt, ut Valliſius interpretatur, *exponentes*, ſive antecedentes, & conſequentes *inter ſe multiplicati aliquam effecerint rationem*; hoc eſt cum illarum rationum antecedentes inter ſe ducti alium antecedentem produxerint, ſicuti conſequentes inter ſe ducti alium conſequentem; oſtendi ſiquidem, quod utique ratio hujus antecedentis producti ad productum conſequentem componitur ex datis rationibus.

De Progreſſionibus.

XI. HActenus rationes illas inter ſe comparavi, quæ inter tres, aut quatuor terminos, ſive magnitudines reperiuntur, earumque proprietates omnes, quibus illæ conjungi, dividi,

di, detrahi, multiplicari dicuntur, expoſui; explicandæ poſtremò nunc remanent, ſive conſiderandæ rationes illæ, quæ inter plurimos, ac infinitos etiam terminos, & magnitudines reperiuntur; ſive quæ per plures, ac infinitos terminos continuantur; ut eadem ratio, quæ inter primos duos terminos intercedit, inter innumeros alios ſequentes terminos continuâ, neque interruptâ ſerie, vel ordine progrediatur. Hæc autem ratio, quæ per plures ſequentes terminos continuatur, *Progreſſionem* efficere, ſive componere dicitur, atque magnitudines illæ, vel termini, inter quos eadem proportio continuatur, *Termini Progreſſionis* vocantur. De variis itaque Progreſſionis generibus diſſeram; atque admirabiles prorſus illorum proprietates breviter exponam. Quod ut illuſtriùs adhuc intelligi, atque accuratiùs explicari poſſit, illud in primis eſt obſervandum, triplicem eſſe Proportionem illam, quæ inter aliquos terminos, ſeu magnitudines reperitur, *Geometricam* nimirum, *Arithmeticam*, & *Harmonicam*.

XII. Geometrica Proportio dicitur illa, in quâ termini, ſive magnitudines homologæ, ſive antecedentes, homologas alias magnitudines, ſive conſequentes ſimili, vel eodem modo continent, aut ab illis continentur; ſive cum exceſſus, aut differentia magnitudinum, quæ inter ſe comparantur, ſimilis, aut eadem pars ſit earundem magnitudinum, ut fuſiùs in definitione 7. lib. 1. jam demonſtravi; in quo plurimas illis Proportionis Geometricæ, quæ per antonomaſiam *Proportio* ſimpliciter appellatur, proprietates complexus ſum. 2. Arith-

2. Arithmetica verò Proportio eſt illa, in quâ terminorum, ſive magnitudinum differentia ſemper eſt eadem, & æqualis; hoc eſt, in quâ magnitudines omnes ſibi ordine ſuccedentes æquali exceſſu ſe ſuperant; ut ex. gr. numeri juxta ſeriem illorum naturalem 1, 2, 3, 4, &c. unitate ſe ſuperant; numeri impares 1, 3, 5, 7, 9, &c. binario.

3. Harmonica denique eſt illa, in quâ prima magnitudo eſt ad ultimam in eadem geometricâ ratione, quam habet differentia inter primam, & ſecundam magnitudinem ad differentiam inter eandem ſecundam, & tertiam; ut ex. gr. in ſubjectis numeris 6, 4, 3

$$6 \; {}^{2} \; 4 \; {}^{1} \; 3$$

nam geometricè 6 eſt ad 3, ut 2 ad 1.

XIII. Si itaque proportio, quæ inter plures, ac infinitos etiam terminos continuatur, fuerit Geometrica, tunc *Geometrica Progreſſio* orietur; ſicuti ſi Proportio continuata fuerit Arithmetica, *Progreſſio* quoque erit *Arithmetica*; ſi Harmonica denique ſit proportio, etiam *Progreſſio Harmonica* dicetur; unde ex vario proportionis, ſive progreſſionis genere, variæ quoque illius proprietates oriuntur; quas ſequentibus Propoſitionibus oſtendemus.

VII.

In qualibet Progreſſione Arithmeticâ, quicumque ſit numerus terminorum, ſumma duorum extremorum 1, 8 *ſemper aequalis eſt ſummae duorum terminorum* 2,

7; *vel*

7; vel 3, 6, &c. qui aequaliter ab extremis diſtent.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

Æqualiter enim, aut tantò major eſt 2 ipſo 1, quantò 8 major eſt ipſo 7, ſive defectus numeri 1 a numero 2 æqualis eſt exceſſui numeri 8 ſupra 7, ergo 8 unà cum 1 æqualis erit 7 unà cum 2, atque ita ſemper.

VIII.

In qualibet Progreſſione Arithmeticâ, ſi numerus terminorum fuerit impar, hoc eſt a binario non menſuretur, ſumma extremorum 1, 9 *dupla erit numeri, vel termini medii* 5.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13.

Terminus medius 5 continet unitatem, ac inſuper toties communem terminorum exceſſum, vel differentiam, quot ſunt termini, quos habet ante ſe; ultimus verò terminus 9 continet unitatem, ac inſuper toties eundem communem exceſſum, vel differentiam terminorum quot terminos habet ante ſe; ſed ultimus terminus duplò plures terminos habet ante ſe, quàm habeat terminus medius, ergo duplò plures erunt exceſſus, vel differentiæ communes in ultimo, quàm in medio: additâ ergo ipſi unitate, vel primo termino, illam quoque bis ultimus continebit, quam medius ſemel tantummodo continet;

net; adeoque communes exceſſus, & unitates duplò plures erunt in ultimo termino unà cum primo, hoc eſt in ſummâ, vel aggregato extremorum, quàm in medio; ideoque hæc extremorum ſumma dupla erit termini medii.

IX.

In qualibet Progreſſione Arithmeticâ, quicumque ſit numerus terminorum, omnium terminorum ſumma erit aequalis producto ex ſummâ extremorum in dimidium numeri terminorum; ſive, quod idem eſt, *ex dimidio ſummae extremorum in numerum integrum terminorum.*

8
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Si numerus terminorum fuerit par, cùm duorum extremorum ſumma ſit æqualis ſummæ aliorum duorum, qui proximè illis adhærent, ſicque ſemper, erit omnium terminorum ſumma æqualis ſummæ extremorum toties ſumptæ quot ſunt paria terminorum in eâdem ſummâ, hoc eſt, quotus eſt dimidius numerus terminorum; unde ſi eadem extremorum ſumma per dimidium numeri terminorum multiplicetur; ſive ſi multiplicetur numerus integer terminorum per dimidium ſummæ extremorum, ſemper productum erit æquale ſummæ omnium terminorum.

Quod ſi numerus terminorum fuerit impar,

1, 2, 3, 4, (5) 6, 7, 8, 9.

auferatur terminus medius, eritque, ut antea, omnium

omnium reliquorum ſumma æqualis producto ex dimidio ſummæ extremorum in numerum terminorum, omiſſo medio; ſed medius ipſe eſt dimidium ſummæ extremorum (a), ergo terminorum ſumma, omiſſo medio, æqualis eſt producto ex medio in numerum terminorum omiſſo medio, ergo ſi utrimque ſemel addatur ipſe medius, erit ſumma omnium terminorum etiam cum medio æqualis producto ex eodem medio, ſive ex dimidio ſummæ extremorum, in integrum numerum terminorum.

a *hujus.*

X.

In naturali Progreſſione Arithmeticâ numerorum imparium, ſumma extremorum dupla eſt numeri omnium terminorum.

Terminus ultimus præter unitatem toties continet communem exceſſum, hoc eſt, ex hypotheſi, binarium, quot ſunt termini in progreſſione poſt primum terminum, hoc eſt unitatem; ergo ſi ultimo termino addatur hic primus terminus, vel unitas, quæ cum illâ unitate, quæ jam continebatur in ultimo, novum adhuc binarium componet, in ultimo termino ſimul cum primo, ſive in extremorum ſummâ, toties binarius continebitur, quot ſunt omnes termini in Progreſſione, ſive unitates in numero terminorum, adeoque hæc extremorum, vel binariorum ſumma, dupla erit numeri terminorum.

XI.

Iiſdem poſitis ſumma omnium terminorum ſemper æqualis eſt quadrato numeri terminorum.

Hæc etenim ſumma æqualis eſt producto ex dimidio ſummæ extremorum in numerum inte-
a 9. *hu-* grum terminorum (a); ſed dimidium ſummæ ex-
jus. tremorum ſemper eſt æquale numero integro ter-
b *An-* minorum (b), ergo omnium terminorum ſumma
te. ſemper æqualis erit producto ex numero integro terminorum in ſeipſum, nempe quadrato numeri terminorum.

XII.

Si numeri fuerint in ſerie, vel ordine naturali, aſſumaturque ex illis aliquis ex. gr. 3, cujus quadratus numerus ſit 9, dico quod quadratus numeri, ſive radicis ſequentis 4 erit æqualis eidem quadrato 9, illiuſque radici 3 bis ſumptae unà cum unitate ſimul collectis.

Multiplicatis inter ſe numeris, ſive radicibus 3, 4 productus ſit 12, ſitque quadratus numeri 4 numerus 16.

Cùm itaque numerus, vel radix 3 ter in quadrato 9 contineatur, at in numero 12 quater, exceſſus numeri 12 ſupra 9 erit ipſe 3 ſemel ſumptus; ſimiliter etiam quia numerus 4 ter in numero 12 continetur, quater verò in 16, erit exceſſus numeri 16 ſupra 12 numerus ipſe 4, hoc eſt numerus 3 cum unitate; ergo integer exceſſus numeri quadrati 16 ſupra numerum quadratum 9 erit radix 3 bis ſumpta unà cum unitate; ideoque ſi propoſito quocumque numero 3 illius quadrato 9 addatur radix 3 bis cum unitate, erit illorum aggre-

3	9
	12
4	16

ga-

gatum, aut ſumma ſemper æqualis quadrato numeri 4, qui proximè ſequitur numerum propoſitum 3.

XIII.

Si itaque numeri omnes naturali ordine diſponantur, unitas efficiet primum quadratum, hoc eſt unitatem ipſam: duo impares 1, 3 efficient ſecundum quadratum 4, cujus radix eſt ſecundus numerus 2; tres impares 1, 3, 5 efficient 9 tertium quadratum tertii numeri 3, atque ita ſemper.

1, **2**, 3, **4**, 5, **6**, 7, **8**, 9, &c.

Ratio eſt, quia ſi unitati, hoc eſt primo quadrato; addatur bis ejus radix, hoc eſt eadem unitas, unà cum aliâ unitate, hoc eſt addantur tres unitates, ſumma ex his omnibus efficiet quadratum numeri ſequentis 2 (a). Si quadrato 4 addatur bis ejus radix 2 unà cum unitate, hoc eſt numerus 5, reſultabit numerus 9 quadratus numeri ſequentis 3. Si quadrato 9 addatur bis ejus radix 3 unà cum unitate, ideſt numerus 7, fiet 16 quadratus numeri ſequentis 4, atque ita deinceps. Verùm de Proprietatibus illis, quæ magnitudinibus in Progreſſione Arithmeticâ diſpoſitis conveniunt, hæc dicta ſint.

a *Ex antec.*

XIV. Longè verò uberiores, utilioreſque ſunt proprietates illæ, quæ in Progreſſione Geometricâ deprehenduntur.

XIV.

Figura XVII. *Si fuerint quotcumque magnitudines* AB, BC, CD, DE, F, *&c. in Progreſſione Geometricâ, ſitque* GB *differentia, vel exceſſus primae magnitudinis ſupra ſecundam;* HC *differentia, vel exceſſus ſecundae ſupra tertiam;* ID *differentia tertiae ſupra quartam, ac demum* KE *differentia penultimae ſupra ultimam; dico, quod erit prima differentia* GB *ad primam magnitudinem* AB *ut omnes ſimul differentiae ad omnes ſimul magnitudines, vel terminos Progreſſionis excepto ultimo.*

Quia enim AB eſt ad BC ut BC ad CD, ſive ex hypotheſi, ut ablata AG ad ablatam BH, erit (a) & reliqua GB ad reliquam HC ut tota AB ad totam BC; alternandoque reliqua GB ad totam AB ut reliqua HC ad totam BC, atque ita ſemper donec perveniatur ad ultimam differentiam, ac penultimam magnitudinem, ergo (b) prima differentia ad primam magnitudinem erit ut omnes ſimul differentiæ ad omnes ſimul magnitudines exceptâ ultimâ.

a Ex 11. *I.*

b Ex 9. *I.*

XV.

Iiſdem poſitis omnes ſimul differentiae unâ cum ultimo termino, ſeu magnitudine ſunt aequales primae magnitudini.

Ultima magnitudo F cum ultimâ differentiâ KE æqualis eſt ipſi DE, ſicuti DE cum differen-

rentiâ ID, hoc eſt ultima magnitudo F cum duabus differentiis KE, ID eſt æqualis ipſi CD, atque ita ſemper donec perveniatur ad ultimam differentiam GB, ergo ultima magnitudo F cum omnibus ſimul differentiis erit æqualis ipſi AB, nimirum primo termino, ſeu magnitudini.

XVI.

Si itaque Progreſſio Geometrica continuata, vel extenſa fuerit in infinitum, hoc eſt ſi termini, vel magnitudines ſemper, ac ſemper in infinitum decreſcant, ut ultima proinde particula, vel magnitudo F *ſit ipſum nihil, ſive evaneſcat, tunc prima magnitudo erit aequalis omnibus differentiis ſimul ſumptis; adeoque eadem prima magnitudo media proportionalis erit inter primam differentiam, & magnitudines omnes infinitas ſimul ſumptas.*

Erit enim prima differentia ad primam magnitudinem, ut omnes ſimul differentiæ, hoc eſt eadem prima magnitudo ad omnes ſimul magnitudines ſinè ultimâ (a), ſed hæc ultima magnitudo eſt ipſum nihil, ideoque omnes ſimul magnitudines, vel differentiæ ſinè ultimâ ſunt æquales omnibus magnitudinibus, vel differentiis etiam cum ultimâ, ergo prima differentia ad primam magnitudinem erit ut omnes differentiæ ſimul, ſive eadem prima magnitudo, ad omnes infinitas magnitudines; ſive prima magnitudo media proportionalis erit inter primam differentiam, & omnes magnitudines.

a 15. *hujus.*

XVII.

Omnibus itaque *illis infinitis magnitudinibus quantitas aliqua, ſeu magnitudo finita, ac determinata aequalis haberi, vel aſſignari poterit.*

a *Ex Poſt. lib. I.* Fiat (a) ut prima differentia ad primam magnitudinem, ita eadem magnitudo ad aliam tertiam, hæc etenim tertia magnitudo ſemper æqualis erit aggregato omnium magnitudinum infinitarum.

XV. Aliter etiam inſtitui, ſive conſiderari poteſt proportio inter ejuſmodi terminos Progreſſionis, quod nempe prima differentia ad ſecundum terminum eſt ut ſecunda differentia ad tertium terminum, atque ita ſemper, donec ultima differentia ad ultimum ſequentem terminum referatur; adeoque omnes ſimul differentiæ erunt ad omnes terminos ſequentes, ut prima differentia ad ſecundum terminum; hoc eſt primus terminus ſine ultimo erit ad omnes ſequentes terminos, ut idem primus terminus ſine ſecundo eſt ad ſecundum. Quod ſi termini ſint infiniti, atque ultimus terminus evaneſcat, primus terminus erit ad infinitos ſequentes ut prima differentia ad ſecundum terminum.

XVIII.

Si itaque termini Progreſſionis in proportione duplâ decreſcant, omnes termini, excepto primo, aequales erunt eidem primo termino, ſinè ultimo.

b *Ex hypoth.* Cùm etenim (b) prima differentia ſit æqualis ſecundæ magnitudini, erunt etiam omnes termini

ni excepto primo æquales omnibus differentiis, hoc eſt eidem primo termino ſinè ultimo.

At ſi termini ſint infiniti, omnes termini excepto primo æquales erunt primo termino.

XIX.

Si fuerint termini in proportione triplâ primus terminus ſinè ultimo, hoc eſt omnes differentiae, duplus erit omnium ſequentium terminorum, ſicuti prima differentia dupla eſt ſecundi termini.

Quod ſi fuerint infiniti termini, idem primus terminus duplus erit omnium ſequentium terminorum.

XX.

Si denique fuerint in proportione quadruplâ, primus terminus ſinè ultimo triplus erit omnium ſequentium terminorum; ſicuti prima differentia tripla eſt ſecundi termini.

Si verò ſint infiniti, vel ultima magnitudo evaneſcat, primus terminus triplus erit omnium infinitorum ſequentium terminorum.

LIBER III.

De Lineis inter ſe concurrentibus, & Angulis, qui exinde formantur.

VAria continuæ Quantitatis genera ordine ſuperiùs expoſito traditurus a primâ, vel ſimpliciori illius ſpecie, hoc eſt a lineis, exordiar; in quibus unica extenſio, ſola nimirum longitudo ſinè ullâ latitudine reperitur. Quandoquidem verò lineæ aliquando ſimul concurrere, & Angulos efformare; aliquando verò neque concurrere, neque Angulos efformare poſſunt; Lineas quidem inter ſe concurrentes, & Angulos, qui exinde oriuntur, in hoc tertio Libro contemplabor; non concurrentes autem, ſive æquidiſtantes in quarto; in quinto denique lineas omnes intra circulum inter ſe, vel cum ipsâ circuli peripheriâ concurrentes conſiderabo. Atque hoc quidem in loco, ut clariori methodo, vel ordine progrediar, initio unicam lineam, deinde duas inter ſe concurrentes, & Angulos, qui ab ipſis oriuntur; tres denique lineas inter ſe concurrentes, & Angulos etiam, qui continentur ab

illis,

illis, examinabo; Angulos ipſos, & lineas invicem conferendo. Quod ſi trianguli vocem adhibere, vel etiam triangula ipſa ſpectare, illorumque ſuperficies invicem conferre ſubinde contigerit, non ideo factum quis temere ſuſpicetur, quòd triangulorum comparatio ad hunc locum pertineat; ſed quòd cùm tres lineæ inter ſe concurrentes triangulum efficiant, ipſæ neque clariùs, neque commodiùs inter ſe conferri poſſe videantur, quàm ſi veluti triangulorum latera, ſeu baſes concipiantur. Unde ſi trianguli vocem omittere quis velit, atque trianguli latera lineas potiùs inter ſe concurrentes, Anguloſque trianguli Angulos a lineis concurrentibus effirmatos vocare malit, perinde eſt: clarior tamen, atque opportunior alia methodus mihi viſa eſt, quâ uſus etiam ſum; ut niſi rerum ordinem, priſtinas ſaltèm voces, quæ hìc ab aliis adhibentur ſervarem; atque illa, quæ ex lineis inter ſe concurrentibus, earumque Angulis hoc loco demonſtratis nitidiſſimè effulgent, atque facillimè deducuntur, alibi proponere, fuſiùſque repetere non cogerer.

DEFINITIONES.

I.

Punctum eſt id, quod partibus caret.

II.

Linea eſt longitudo latitudinis expers.

III.

Æquales itaque lineæ rectæ ſi ſuperimponantur congruere debent: & è converſo, ſi ſuperimpoſitæ congruant, æquales erunt.

Li-

IV.

Linea recta eſt omnium breviſſima, quæ ab uno ad aliud punctum duci poſſunt.

V.

Hinc duæ lineæ rectæ diverſæ inter eadem puncta duci non poſſunt, ſive duæ lineæ rectæ ſpatium claudere, vel continere nequeunt.

VI.

Euclid. 20. I. Et ſi tres rectæ lineæ inter ſe concurrant, illarum quælibet, utpote recta, omniumque breviſſima, quæ inter eadem puncta duci poſſunt, duabus reliquis ſimul ſumptis minor erit; ſive duæ ex illis quomodocumque ſumantur reliquâ majores erunt.

VII.

Superficies eſt longitudo cum latitudine, ſed ſinè altitudine, ſive profunditate.

VIII.

Plana ſuperficies eſt illa, in quâ lineæ omnes, quomodocumque ducantur, ſunt rectæ.

IX.

Quemadmodum lineæ termini, vel extrema ſunt puncta, ita termini, vel extrema ſuperficiei ſunt lineæ.

X.

Angulus eſt inclinatio duarum linearum ita ſibi occurrentium, vel ita ſe tangentium in aliquo puncto, quod Anguli *vertex* vocatur, ut productæ mutuò ſecentur.

XI.

Si aliqua recta linea ſuper aliam rectam inciderit, duos cum illâ angulos efficiet, qui *conſequentes*, vel *deinceps poſiti* dicantur.

Æqua-

XII.

Æquales anguli dicuntur illi, quorum latera ſuperimpoſita congruere debent.

XIII.

Si anguli deinceps poſiti æquales fuerint, uterque illorum *rectus* vocetur.

XIV.

Sin verò inæquales fuerint, ille qui major eſt recto, dicatur *obtuſus*; is verò, qui minor eſt recto, dicatur *acutus*.

XV.

Recta, quæ ſuper aliam rectam incidens æquales, & rectos angulos efficiat, dicatur *perpendicularis*; quæ verò inæquales efficiat angulos, *obliqua*.

XVI.

Hinc omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt. Si etenim linea A C (a) ita ſuperimponatur lineæ A B (b), ut punctum D cadat ſuper punctum D, etiam perpendicularis D B cum perpendiculari D C coincidet; alioquin, ſi hinc inde a perpendiculari D C deflecteret, eſſet obliqua.

a Fig. VIII.
b Fig. IV.

XVII.

Figura eſt ſuperficies illa, quæ ab unâ, vel pluribus lineis continetur.

XVIII.

Circulus eſt figura, quæ ab unicâ lineâ curvâ continetur, cujus ſingula puncta æqualiter diſtant a puncto medio, quod *centrum* vocatur.

XIX.

Hinc omnes lineæ, quæ a centro ad circumferentiam ducuntur, & dicuntur *radii*, æquales erunt.

Trian-

XX.

Triangulum eſt figura tribus lineis inter ſe concurrentibus contenta.

XXI.

Et ſi omnia tria latera ſint æqualia, triangulum dicitur æquilaterum.

XXII.

Duæ quælibet lineæ trianguli *latera* dicuntur, reliquum verò *baſis*.

POSTULATA.

I.

Ab aliquo puncto ad quodlibet aliud punctum lineam rectam ducere.

II.

Propoſitam rectam lineam in infinitum extendere.

III.

Dato centro, & radio, vel intervallo circulum deſcribere.

IV.

Fig. X. Circa datum punctum A, quod in propoſitâ rectâ lineâ reperitur, circulum deſcribendo, æquales hinc inde partes AG, AL, veluti radios, abſcindere.

PROPOSITIONES.

I.

Euclid. 10. *I.* Fig. I. *Datam lineam rectam* AB *bifariam dividere.*

Centris A, B, eodemque radio AB deſcribantur circuli CBD, FAG, qui mutuò ſecentur in punctis H, I, conjungaturque HI; hæc

hæc etenim bifariam dividet in E propoſitam lineam rectam A B. Ex centris A, B ducantur ad puncta H, I radii A I, A H, B I, B H, cùmque illorum ſinguli eidem radio A B ſint æquales, inter ſe (a) quoque æquales erunt. Si itaque centris I, H; radiis I B, H B deſcribantur circuli M B N, O B P, tranſibit uterque illorum per idem punctum A communem extremitatem radiorum æqualium I A, H A. a *Ax.* 7.

Intelligantur itaque radii I B, B H circa lineam rectam H I, vel extremitates I, H ita converti, ut in alteram ſuperficiei partem, in quâ deſcriptæ ſunt rectæ, vel radii I A, H A, cadant; manifeſtiſſimè apparet, quod punctum B extremitas nimirum rectæ, vel radii I B cadere debet in aliquod punctum peripheriæ M A B N; atque ſimiliter extremitas radii, vel rectæ H B, hoc eſt idem punctum B, cadere debet in aliquod punctum alterius peripheriæ O A B P. Cadet igitur punctum B in punctum A, quod eſt utrique peripheriæ commune, vel in quo peripheriæ mutuò ſecantur; adeoque etiam recta B E cadet ſuper rectam A E; eritque conſequenter A E æqualis ipſi B E, ſive recta A B bifariam dividetur in E.

II.

Ad datam rectam lineam A B *ex puncto* E, *quod in ipſâ reperiatur, perpendicularem erigere.* *Eucl.* 11. *I.* Figura ead.

Circa punctum E æquales hinc inde partes abſcindantur E A, E B (b); centriſque A, B, eodemque radio A B deſcribantur, ut antea circuli ſe mutuò ſecantes in H, & I, conjunga- b *Poſt.* 4. *huj.*

tur-

turque H I, quæ, cùm biſariam dividat rectam A B (a), tranſibit per punctum E, in quo eadem recta A B biſariam diviſa fuit (b), eritque recta I H perpendicularis ad A B. Si etenim latus, ſive radius I B convertatur ad A, illius extremitas, ſive punctum B, cadere debet (c) in A, adeoque etiam recta B E cadet ſuper rectam A E, & conſequenter angulus I E B ſuper angulum I E A, unde anguli ipſi conſequentes æquales erunt, & recti, ſive recta I E perpendicularis erit ad A B.

a *Ex antec.* b *Ex conſtr.* c *Ex prob. antec.*

III.

Eucl. 12. l. Fig. II. *Ad datam rectam* A B *ex dato puncto* C, *quod extra ipſam reperitur, perpendicularem demittere.*

Ad quodlibet punctum D ducatur (d) ex C recta C D, eâdemque veluti radio deſcribatur (e) circulus DF, qui a datâ rectâ ſecetur in E; junctâque C E, centris D, E, radiiſque D C, E C deſcribantur alii circuli ſe mutuò ſecantes in punctis C, I, quæ conjungantur rectâ C I, eritque radius E I æqualis radio E C, atque ſimiliter radius D I radio D C; unde, ſicuti radii E C, D C æquales ſunt inter ſe, æquales etiam erunt radii E I, D I, adeoque circulus G E H, qui centro I, radio I E deſcribatur, etiam per punctum D tranſibit.

d *Poſt. 1. huj.* e *Poſt. 3.*

Intelligantur itaque latera, ſive radii C E, E I circa rectam C I converti, punctum E cadere debebit (f) in D, ideoque etiam recta E O ſuper rectam D O, & angulus C O E ſuper angulum C O D; æquales itaque, & recti ſunt anguli conſequentes, adeoque (g) recta C O perpendicularis erit ad A B.

f *Ex 1. hui.* g *Definit. 15. huius.*

Ex

IV.

Ex dato puncto A *lineam rectam du-* Euclid.
cere, quæ ſit æqualis datæ rectæ BC. 2. 1. Fig.III.

Jungatur AB, & centris A, B, eodemque
radio AB deſcribantur circuli ſe mutuò ſecan-
tes in D, extenſiſque in infinitum radiis, ſive
lateribus DB, DA, quæ eidem radio AB, &
inter ſe æqualia ſunt (a), centro B, radioque BC a *Def.*
deſcribatur arcus ECF, qui ſecetur in G a radio 19. *hui.*
DB; tum centro D, radioque DG deſcribatur arcus
FGH, qui ſecetur in I ab alio latere, vel ra-
dio DI, eritque recta AI æqualis datæ re-
ctæ BC.

Si etenim ex æqualibus radiis DI, DG au-
ferantur æquales partes, aut radii DA, DB,
etiam reliqua pars AI erit (b) æqualis reliquæ b *Ax.*
parti BG, ſive datæ rectæ BC. 3.

V.

Hinc *datis duabus inæqualibus rectis* Eucl.
AK, BC, *auferetur ex majori pars ali-* 3. *I.*
qua, quæ ſit æqualis minori.

Iiſdem, ut antea, poſitis, radio AI de-
ſcribatur arcus HIL ſecans majorem rectam
in O; erit enim abſciſſa pars AO æqualis ipſi
AI, vel BG, vel BC.

VI.

Si ſuper rectam lineam AB *inciderit* Eucl.
alia quæcumque recta CD, *ſive* ED, 13. *I.*
anguli CDA, CDB; *ſive* EDA, Figura IV.
EDB *conſequentes, ſive deinceps poſiti aut*
duo recti, aut duobus rectis æquales erunt.

Si

Digitized by Google

Si recta perpendiculariter incidat, ut CD,
a Def. patet (a) angulos conſequentes inter ſe æquales,
15. hu- & rectos eſſe. Si verò obliquè incideret, ut
ius. ED, erigatur (b) ex D perpendicularis DC, e-
b 2. ritque angulus CDA, & angulus CDB rectus;
huius. ſi itaque ex obtuſo angulo EDA auferatur angulus EDC, relinquetur angulus rectus CDA; ſimiliterque ſi acuto EDB addatur idem angulus EDC, formabitur rectus angulus CDB, ergo obtuſus angulus cum acuto, duo nimirum conſequentes anguli EDA, EDB ſimul ſumpti duobus rectis æquales erunt.

VII.

Hinc *quatuor anguli, qui fiunt a rectis* AB, FE *ſe mutuò ſecantibus in* D, *quatuor rectis æquales erunt. Quemadmodum etiam ſi quotcumque lineæ per idem punctum* D *tranſirent, omnes ſimul anguli, qui ab illis fierent, quatuor rectis ſemper æquales eſſent.*

VIII.

Eucl. *Si duæ rectæ lineæ* AB, FE *ſe mutuò*
15. 1. *ſecent in* D, *anguli* ADF, BDE; *vel etiam anguli* ADE, BDF *ad verticem oppoſiti æquales erunt.*

Tam angulus ADF, quàm angulus BDE
unà cum eodem angulo conſequente ADE duobus
c 6. huius. rectis (c), adeoque etiam inter ſe (d) æquales
d 6. ſunt; ergo ſi communis angulus ADE auferatur,
ex def. relinquetur angulus ADF æqualis angulo oppo-
16. ſito BDE; cùmque angulus ADF cum angulo

ADE,

Digitized by Google

ADE, & angulus BDE cum angulo BDF duobus rectis, ac inter ſe ſint æquales, ablatis æqualibus angulis ADF, BDE, erunt (a) & reliqui ADE, BDF inter ſe æquales. a *Ax.* 3.

IX.

Si in rectam AB *inciderint ad idem punctum* D *rectæ* ED, FD, *quæ oppoſitos angulos* BDE, ADF *inter ſe æquales; aut conſequentes angulos* ADE, ADF *duobus rectis æquales efficiant, erunt rectæ lineæ* FD, DE *in directum poſitæ, hoc eſt rectam lineam component.* *Euclid.* 14. *I.* Figura ead.

Niſi etenim FD cum rectâ DE lineam rectam efficeret, extendatur (b) eadem FD in G, eritque (c) angulus BDG æqualis angulo oppoſito ADF, ſive ex hypotheſi angulo BDE, minor majori, quod repugnat. Similiter etiam anguli ADG, ADF ſimul ſumpti duobus rectis æquales eſſent (d) quibus etiam ex hypotheſi æquales fuerant anguli ADE, ADF; æquales igitur etiam forent anguli ADG, ADF angulis ADE, ADF, ablatoque communi angulo ADF, angulus ADG eſſet æqualis angulo ADE major minori, quod eſt impoſſibile. b *Poſt.* 2. c *Ex antec.* d 6. *huius.*

X.

Si in triangulis ACB, GIH *ſuper æquales baſes* AB, GH *fuerit angulus* CAB *æqualis angulo* IGH, *& angulus* CBA *æqualis angulo* IHG, *erunt etiam latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, æqualia.* *Euclid.* 26. *I.* Fig. V. VI.

Intelligatur enim recta, vel baſis G H ſuper-
a *Def.* imponi, atque congruere (a) cum æquali baſi AB.
3. *hu.* Igitur, ob æquales angulos I G H, C A B, etiam
b *Def.* latus GI cadet (b) ſupra latus AC; atque ſimiliter,
12. *hu.* ob æquales angulos I H G, C B A, latus H I cadet ſuper latus B C, adeoque punctum I, quod eſt utrique lateri commune, cadet ſuper aliud punctum C, quod commune ſimiliter eſt utrique lateri; ideoque latus G I congruet cum latere A C, & latus aliud H I cum alio latere
c *Def.* B C, ergo (c) rectæ, vel latera, quæ æqualibus
3. *hu.* angulis opponuntur, erunt æqualia.

XI.

Euclid. *Si in triangulis* A C B, G I H *duo la-*
4. I. *tera* C A, C B *fuerint æqualia lateribus*
Fig. V. VI. I G, I H; *& inſuper angulus* A C B, *qui a lateribus ipſis efficitur, æqualis angulo* G I H, *qui efficitur, vel continetur ab aliis, etiam baſis, vel reliquum latus* A B *erit æquale baſi, vel reliquo lateri* G H; *& anguli, qui lateribus æqualibus opponuntur, æquales erunt.*

Intelligatur enim latus G I ſuperimponi, at-
d *Def.* que congruere (d) cum æquali latere A C, atque
3. *hu* ſimiliter ob æquales angulos A C B, G I H latus
e *Def.* I H ſuperimponi, atque congruere (e) cum æquali
12. *hu.* latere C B: puncta, vel extremitates G, H cum extremitatibus, ſive punctis A, B, convenient, adeoque etiam recta G H cum rectâ A B con-
f *Ex* gruere debet (f), unde etiam anguli, qui æqua-
def. 5. libus lateribus opponuntur, congruere, & æqua-
huius. les eſſe debent.

Si

XII.

Si ſingula trianguli A C B *latera ſingulis trianguli* G I H *lateribus æqualia fuerint, anguli quoque, qui æqualibus lateribus opponuntur, æquales erunt.* *Euclid.* 8. *I.* Figura VI. VII.

Intelligatur enim latus G H ſuperimponi, atque congruere (a) cum æquali latere A B, etiam punctum I cadere debet, atque congruere cum puncto C. a *Def.* 5. *hu.*

Cadat enim primò, ſi fieri poſſit, in D; extendaturque latus A D in E, eruntque (b) rectæ A C, C E ſimul ſumptæ majores rectâ A E, ſive rectâ A D unà cum ſegmento D E: atque ſimiliter rectæ B E, E D ſimul ſumptæ majores erunt rectâ B D: ergo rectæ A C, C E, E B, cum ſegmento D E, hoc eſt rectæ A C, C B cum ſegmento D E, majores erunt rectis A D, D B unà cum eodem ſegmento D E; ablatoque communi hoc ſegmento D E, rectæ quoque A C, C B majores erunt * rectis A D, D B, ſive G I, I H contra hypotheſim. Quod ſi punctum I caderet in punctum E, quod intra rectam C B reperitur, manifeſtiſſimè apparet partem E B minorem eſſe totâ C B, ſive I H contra hypotheſim. Incidat poſtremò punctum I in punctum F, eruntque rectæ A E, E C majores rectâ A C, hoc eſt ex hypotheſi rectâ A F, demptoque communi ſegmento A E, reliqua C E major erit reliquâ E F, additoque communi ſegmento E B recta C B major erit rectis E F, E B, multòque major (c) rectâ B F, ſive H I contra eandem hypotheſim.

b *Def.* 6. *hu.* *Euclid.* 21. I. c *Ax.* 10.

XIII.

Cùm ſingula unius trianguli latera ſingulis alterius trianguli lateribus ſuperimpoſita mutuò congruere in tribus ſuperioribus propoſitionibus oſtenſum fuerit, obiter inferri poterit, quod

Si duo triangula

1. *Super æquales baſes æquales angulos;*
2. *Inter æqualia duo latera aequales angulos;*
3. *Super aequales baſes aequalia latera, hoc eſt omnia latera aequalia habuerint, triangula ipſa inter ſe, & illorum anguli, qui lateribus aequalibus opponuntur, aequales erunt.*

XIV.

Euclid. 25. I. Figura ead. *Quod ſi in triangulis* ACB, GIH *duo quidem latera* CA, AB *ſint aequalia lateribus* IG, GH, *baſis autem, ſive reliquum latus* IH *majus ſit baſi, ſive reliquo latere* CB, *etiam angulus* IGH, *qui majori lateri opponitur, major erit angulo* CAB, *qui opponitur minori.*

Si etenim angulus IGH æqualis eſſet angulo CAB, etiam baſis IH æqualis eſſet (a) baſi CB, contra hypotheſim.

a 11. huius.

Si verò angulus ipſe IGH minor dicatur angulo CAB, ſuperimpoſito latere GH ſuper æquale latus AB, reliquum latus GI caderet infra latus AC, adeoque punctum I caderet in

in D, vel E, vel F; atque in ſingulis caſibus oſtenderetur, ut antea (a), quod latus quidem AD, vel AE, vel AF æquale eſſe poterit lateri AC, ſive GI; ſed reliquum latus DB, vel EB, vel FB, nimirum latus ipſum IH, minus ſemper eſſet latere CB contra hypotheſim. a 11. *hujus.*

XV.

Si denique latera CA, AB *ſint aequalia lateribus* IG, GH, *ſed alteruter angulus* IGH *ſit major alio angulo* CAB, *etiam baſis, ſive reliquum latus* IH *majus erit baſi, ſeu latere* CB. *Euclid.* 24. I. Figura ead.

Si etenim baſis IH æqualis eſſet lateri, ſive baſi CB, angulus etiam IGH eſſet (b) æqualis angulo CAB; ſive, ſi latus IH minus eſſet latere CB, angulus etiam IGH minor foret (c) angulo CAB, quorum utrumque repugnat hypotheſi. b 12. *hujus.* c *ant.*

XVI.

Hinc autem inferri facilè poterit, quod *Si in duobus triangulis, duo quidem latera duobus lateribus aequalia fuerint; baſes autem, aut anguli, qui a lateribus aequalibus continentur, inaequales fuerint, ipſa quoque triangula inæqualia erunt; illud nimirum, quod majorem baſim, aut angulum habuerit, majus erit; quod verò minorem, minus.*

XVII.

Euclid. *Si duo trianguli* ABC *latera* AB,
5. I. BC *æqualia fuerint, etiam anguli ad ba-*
Figura VIII. *ſim* BAC, BCA, *qui æqualibus late-*
ribus opponuntur, æquales erunt.

a 1. *hu.* Dividatur enim (a) baſis AC bifariam in D,
conjungaturque BD. Erunt itaque ſingula trian-
guli ABD latera ſingulis trianguli CBD la-
b *Ex* teribus æqualia (b), adeoque etiam anguli BAD,
hyp. & BCD, qui æqualibus lateribus opponuntur, æ-
conſt. quales erunt (c).
c 12. *huius.*

XVIII.

Euclid. *Si verò latera* AB, BC *ſint inæqua-*
18. *I.* *lia, etiam anguli ipſi inæquales erunt, &*
Figura *angulus* BAC, *qui majori lateri* BC *op-*
IX. *ponitur, major erit angulo* BCA, *qui*
minori lateri AB *opponitur.*

d 1. *hu.* Diviſâ bifariam (d) baſi AC in D iungatur BD.
Cùm in triangulis ADB, CDB duo quidem
latera AD, DB ſint æqualia lateribus CD,
e *Ex* DB, ſed latus, aut baſis CB major ſit (e) baſi
hyp. AB, erit (f) etiam angulus CDB major angulo
f 14. *hu.* ADB; erigatur itaque (g) perpendicularis DE,
g 2. *hu.* quæ ſecabit in E latus BC, jungaturque AE, erit-
h *Ex* que in triangulis æqualibus (h) ADE, CDE
11. *hu.* etiam angulus EAD æqualis angulo ECD,
adeoque totus angulus BAD, qui major eſt
angulo EAD, major etiam erit angulo BCA.

Si

XIX.

Si in triangulo A B C *anguli* B A C, *Euclid. 6. I. Figura VIII.*
B C A *ad baſim aequales fuerint, latera quoque* A B, C B *aequalia erunt.*

Si etenim latera forent inæqualia, inæquales etiam eſſent (a) anguli contra hypotheſim. *a Ant.*

XX.

Si denique trianguli A B C *anguli ad baſim inæquales fuerint, latera quoque inaequalia erunt; latus nimirum* B C, *quod majori angulo* B A C *opponitur, majus erit latere* A B, *quod minori angulo* B C A *opponitur.* *Euclid. 19. I. Figura IX.*

Concipiatur enim angulus C A E æqualis angulo A C B: erit ergo (b) ob æquales angulos C A E, A C E, etiam latus A E æquale lateri C E, adjectoque communi ſegmento E B, latus C B erit æquale lateribus A E, E B ſimul ſumptis, adeoque (c) majus latere A B. *b Ant. c Def. 6. hui.*

XXI.

Datum angulum A B C *bifariam dividere.* *Euclid. 9. I. Figura VIII.*

Ablatis hinc inde (d) æqualibus partibus B A, B C jungatur A C, dividaturque bifariam (e) in D, eruntque (f) ſingula trianguli A B D latera ſingulis trianguli C B D lateribus æqualia, adeoque etiam angulus A B D erit (g) æqualis angulo C B D, ſive totus angulus A B C bifariam dividetur a rectâ B D. *d 5. huius. e 1. huius. f Ex conſtr. g 12. huius.*

XXII.

Euclid. 23. 1. Figura X. *Ad punctum* A *datae rectae* AB *angulum deſcribere aequalem angulo dato* CDE.

a 5. huius. Ductâ quomodocumque rectâ CE, ponatur (a) AF æqualis ipſi DC; AG æqualis DE, FH æqualis ipſi CE, & centris A, F, radiiſque AG, FH deſcribantur circuli ſe mutuò ſecantes in I, jungaturque AI, FI. Erunt itaque ſingula trianguli AIF latera æqualia rectis GA, AF, FH, ſive (b) ſingulis lateribus trianguli CDE, adeoque (c) etiam angulus FAI erit æqualis angulo dato CDE.

b Ex conſtr. c 12. huius.

XXIII.

Hinc *datis inaequalibus angulis* KAB, CDE, *auferetur ex majori pars aliqua, vel angulus, qui ſit aequalis minori,*

d Ex antec. Si ad idem punctum A formetur (d) angulus IAB æqualis angulo minori EDC.

XXIV.

Euclid. 22. I. Figura ead. *Datis etiam tribus lineis* DC, DE, EC, *quarum duae quomodocumque ſumptae reliquam excedant, deſcribetur triangulum, quod ex ipſis, aut ex aliis ipſis aequalibus componatur,*

Si ex indefinitâ lineâ GB auferantur partes GA, AF, FH æquales datis lineis, deſcriptiſque circulis ſe mutuò ſecantibus in I, jungatur AI, FI.

MO-

MONITUM.

SI cui fortaſſe priores tres hujus libri propoſitiones ob circulos, qui deſcribuntur, aut eorundem circulorum radios, qui mutuò ſuperimponuntur, prolixiores, aut longiores videantur, quàm ut primo loco addiſcentium oculis exponantur, ſequentem ordinem adhibere is poterit, qui ad veterem quidem Euclidis ordinem magis accedit, ſed naturalem ſeriem perturbat, quâ a ſimplicioribus ad compoſitiora ſenſim progrediamur.

Primo loco oſtendatur Propoſitio, quæ in ſuperiori ordine eſt X. Deinde ſequentes omnes uſque ad XVI. incluſivè, tum ſequatur.

VIII.

Datam lineam rectam AB *biſariam dividere.* Fig. I.

Deſcriptis circulis ſe mutuò ſecantibus in H, I, junctiſque radiis æqualibus AI, AH; BI, BH, cùm in triangulis HAI, HBI latera HA, AI ſint (a) æqualia lateribus HB, BI, & baſis HI ſit utrique communis, erit (b) etiam angulus AIH æqualis angulo BIH; unde in triangulis AIE, BIE, in quibus latera AI, IE ſunt æqualia lateribus BI, IE, & angulus AIE æqualis angulo BIE, erit (c) etiam baſis AE æqualis baſi EB, ſive recta AB biſariam dividetur in E.

a *Def.* 19. *hu.*
b 12. *huius.*
c 11. *huius.*

IX.

Datum angulum rectilineum ABC *biſariam dividere.* Figura VIII.

De-

Demonſtrabitur eodem modo, quo ſuperiùs demonſtrata fuit Propoſitio XXI.

X.

Fig. I. *Super datam rectam lineam* AB *ex puncto* E *perpendicularem erigere.*

Abſciſſis hinc inde æqualibus partibus EA, EB, deſcriptiſque circulis ſe mutuo ſecantibus in H, I, jungatur EI, AI, BI. Cùm itaque ſingula latera trianguli AIE ſint (a) æqualia ſingulis lateribus trianguli BIE, erit (b) angulus AEI æqualis angulo BEI, adeoque uterque illorum rectus erit (c), & linea EI perpendicularis ſuper AB.

a *Ex conſtr. & def. 19. hu.*
b *Ex 11. hu.*
c *Def. 13. hu.*

XI.

Figura VIII. *Ad datam rectam lineam* AC *ex puncto* B *perpendicularem demittere.*

Ductâ quomodocumque rectâ BA, quâ veluti radio deſcribatur arcus AC ſecans rectam in puncto C, jungatur BC, dividaturque bifariam AC in D. Singula latera trianguli ABD erunt (d) æqualia lateribus trianguli CBD, unde etiam angulus ADB erit æqualis angulo CDB, & linea BD perpendicularis ad AC.

d *Ex conſtr. & def. 19. hu.*

XII. Loco ponatur illa, quæ in ordine ſuperiori eſt IV. deinde reliquæ ſequentes omnes uſque ad X. excluſivè; tum propoſitio XVII., quæ ommiſſa fuerat, aſſumatur, poſt quam eadem ſeries, aut ordo obſervetur; niſi quod XXI. jam numero IX. hic demonſtrata, prorſus ommitti debet.

LIBER

LIBER IV.

De Lineis inter ſe minimè concurrentibus, ſive Parallelis.

QUæ de Lineis æquidiſtantibus, aut Parallelis ab antiquioribus Geometris accepimus, inter illuſtriora certè illorum inventa haberi meritò poterunt, cùm exinde plurima oriantur, quæ varias angulorum, linearum, ſuperficierumque proprietates, & accidentia nobis oſtendunt; atque in illarum etiam naturâ levis quædam infiniti imago, atque admirabilis ingenii noſtri vis effulgeat. Huic tamen eximiæ Geometriæ parti nativum illum nitorem, perſpicuitatemque, quæ in ceteris obſervatur, deeſſe plurimi querebantur, quòd ex infinitâ linearum longitudine illarum æquidiſtantia explorari, vel inferri conſueverit, aut ex aliquo principio plerumque negativo repeti, quod ambiguum, dubiæque lucis, ac certitudinis videbatur. Variis itaque rationibus doctrinam hanc reſtituere, illuſtrare, confirmare, Clavius, Borellius, Tacquetus, aliique pluri-

mi

mi aggreſſi ſunt; ego verò ita rem ipſam pertractavi, ut ex clariſſimâ definitione æquidiſtantium linearum proprietates affirmativè oſtenderim, ut ex ſequentibus facilè intelligi, deprehendique poterit.

DEFINITIONES.

I.

Lineæ *Parallelæ* dicuntur illæ, quæ ſemper æqualiter inter ſe diſtant, unde quamvis in infinitum producantur, nunquam tamen convenient, aut conjungentur.

II.

Diſtantia verò linearum menſuratur, vel exhibetur a lineis, quæ perpendiculariter a punctis unius lineæ ducuntur ad aliam; adeoque ſi perpendiculares ejuſmodi fuerint ſemper æquales, lineæ parallelæ, vel æquidiſtantes erunt.

III.

Parallelogrammum eſt figura quatuor lineis rectis, veluti lateribus contenta; cujus oppoſita latera ſunt inter ſe parallela.

IV.

Quod ſi præter oppoſita latera parallela, habuerit etiam omnes angulos æquales, & rectos, *Rectangulum* vocabitur.

V.

Ac, ſi præter oppoſita latera parallela, & angulos omnes æquales, & rectos, omnia quoque latera æqualia fuerint, erit *Quadratum*.

Ce-

VI.

Ceteræ verò figuræ quadrilateræ, quarum oppoſita latera parallela non fuerint, dicuntur *Trapezia*.

PROPOSITIONES.

I.

S*I ſuper eâdem rectâ* A B *erigantur* Figura *duæ perpendiculares* A D, B C; *ſive* XI. *ſi recta linea* A B *incidens in rectas* B C, A D *ſuper utramque perpendicularis fuerit, rectæ* A D, B C *erunt parallelæ.*

Ex puncto quolibet C demittatur (a) C D perpendicularis ad A D, abſciſsâque A E, quæ ſit æqualis ipſi A D, erigatur (b) perpendicularis E F, jungaturque B D, B E.

a 3. *III.*
b 2. *III.*

In triangulis itaque B A D, B A E latera B A, A D ſunt æqualia lateribus B A, A E, & rectos inſuper, & æquales (c) angulos continent, ergo (d) etiam baſis B D erit æqualis baſi B E, angulus A D B erit æqualis angulo A E B; & angulus A B D angulo A B E; ſed angulus rectus A D C erat (e) æqualis angulo recto A E F, ſicuti rectus angulus A B C æqualis angulo recto A B F, ergo (f) reliquus etiam angulus B D C erit æqualis angulo reliquo B E F, & reliquus D B C reliquo E B F, adeoque in triangulis B C D, B F E, quæ ſuper æquales baſes B D, B E duos angulos duobus angulis æquales habent, erit (g) etiam latus, ſive perpendicularis F E æqualis lateri, vel perpendiculari C D, quod cùm ubique verifi-

c *Ex hyp.*
d 11. *III.*
e *Def.* 16. *III.*
f *Ax.* 3.
g 10. *III.*

a *Def.* 2. *huj.* rificetur, rectæ lineæ FC, ED erunt (a) parallelæ.

II.

Euclid. 27. *I.* *Figura* XII. *Si recta* AB *incidens in rectas* AD, HC *alternos angulos* HBA, BAD *æquales fecerit, rectæ* AD, HC *erunt parallelae.*

b 1. *III.* c 3. *III.* d 5. *III.* Bifariã dividatur (b) in I recta AB, demittaturque (c) ex I perpendicularis IE; abſciſsâque (d) BF, quæ ſit æqualis ipſi AE, jungatur FI.

e *Ex conſtr.* f 11. *III.* g 9. *III.* h 11. *III.* i *Ant.* Latera EA, AI ſunt (e) æqualia lateribus FB, BI, & anguli, qui ab ejuſmodi lateribus continentur, hoc eſt alterni EAI, FBI ſunt ex hypotheſi æquales, ergo (f) etiam anguli AIE, BIF ad verticem oppoſiti æquales erunt: adeoque (g) rectæ EI, IF unicam lineam rectam efficient: cùmque angulus IFB ſit (h) æqualis angulo recto IEA, adeoque rectus, erit recta EF perpendicularis ad utramque rectam HC, AD, unde (i) ejuſmodi rectæ erunt parallelæ.

III.

Euclid. 28. *I.* Facilè apparet, quod *ſi externus angulus* CBG *fuerit æqualis angulo interno, ac oppoſito* DAB: aut etiam *ſi duo interni, & ex eadem parte* CBA, BAD *æquales ſint duobus rectis*, quemadmodum duo conſequentes CBA, HBA duobus rectis æquales ſunt, *rectae lineae* HC, AD *erunt parallelæ.*

Semper enim in utrâque hypotheſi alterni anguli HBA, DAB erunt æquales eidem

Digitized by Google

dem angulo C B G, & inter ſe, adeoque (a) recta H C, A D erunt parallelæ. a *Ant.*

IV.

Hinc *per datum punctum* B *duci poterit recta, quae ſit parallela rectae* A D. *Euclid.* 31. *I.* Figura ead.

Si junctâ quomodocumque B A fiat (b) angulus alternus A B H æqualis angulo D A B: erit enim (c) recta H C datæ lineæ A D parallela. b 22. *III.* c 2. *huius.*

V.

Si rectae lineae F C, E D *parallelae fuerint, ducaturque* B A *perpendicularis ad* E D, *erit illa perpendicularis etiam ad aliam* F C. Figura XI.

Abſciſſis hinc inde (d) æqualibus partibus A E, A D, erectiſque perpendicularibus (e) E F, D C facilè oſtendetur (f) in triangulis E A B, D A B baſes E B, D B, & angulos A E B, A D B æquales eſſe; adeoque ſi iſti ex rectis, & æqualibus (g) angulis A E F, A D C auferantur, erunt etiam reliqui anguli B E F, B D C æquales; ſed æquales etiam ſunt perpendiculares E F, D C (h), ergo in triangulis B E F, B D C, quæ duo latera duobus lateribus, & angulos, qui ab æqualibus ipſis lateribus continentur, æquales habent, erit (i) etiam baſis F B æqualis baſi B C, & angulus F B E angulo C B D; ſed angulus etiam A B E erat æqualis angulo A B D, ergo (k) integer angulus A B F erit æqualis integro angulo A B C deinceps poſito, adeoque (l) recta A B perpendicularis erit ad rectam F C.

d *Poſt.* 4. *III.* e 2. *III.* f *Ex* 11. *III.* g *Ex hypoth.* h *Def.* 1. *hui.* i 11. *III.* k *Ax.* 4. l *Def.* 15. *III.*

Si

VI.

Euclid. 29. I. Figura XII. *Si recta* A B *in duas* H C, A D *parallelas inciderit, alternos angulos* H B A, B A D *aequales efficiet*.

a 2. III. b Ant. c 22. III. d Ax. 3. e 19. III. Erigatur (a) perpendicularis A H, quæ ſuper utramque A D, H C perpendicularis erit (b); & fiat (c) angulus F H I æqualis angulo D A I; hoc eſt ab æqualibus angulis rectis D A H, B H A auferantur æquales partes, eritque (d) reliquus etiam angulus I H A æqualis angulo reliquo I A H, adeoque (e) latus I H æquale lateri I A: tum demittatur ex I perpendicularis I E, & aſſumptâ H F, quæ ſit æqualis ipſi A E, jungatur I F.

f Ex conſtr. g 11. III. i 8. III. k 10. III. In triangulis itaque I H F, I A E duo latera I H, H F duobus lateribus I A, A E æqualia (f), æquales angulos I H F, I A E continent, ergo baſis I F erit (g) æqualis baſi I E, & angulus I F H æqualis angulo recto I E A, adeoque rectus; unde baſes E I, I E erunt in directum poſitæ, & cum rectâ A B, quam ſecant, æquales efficient (i) oppoſitos angulos A I E, B I F, adeoque triangula E I A, F I B, quæ ſuper æquales baſes E I, I F duos angulos duobus angulis æquales habent, erunt (k) æqualia; unde reliquus etiam angulus F B I, erit æqualis angulo reliquo alterno I A E, vel B A D.

VII.

Euclid. 29. I. Figura ead. Hinc facilè apparet, quod cùm anguli oppoſiti G B C, H B A ſint æquales, etiam *externus angulus* G B C *erit aequalis angulo interno* B A D; & addito com-

communi angulo C B A, ſicuti duo conſequentes anguli G B C, C B A duobus rectis æquantur, ſic etiam *ſemper duo interni* C B A, B A D *duobus rectis aequales erunt*.

VIII.

Rectae lineae A B, C D, *quae parallelae ſint eidem rectæ* E F, *inter ſe quoque parallelae erunt*. Euclid. 30. I. Figura XIII.

Ducatur quomodocumque recta G O. Erit itaque (a) ob duas A B, E F parallelas, angulus A G O æqualis alterno G I F; vel, ob E F, C D ſimiliter parallelas, angulo G O D; adeoque rectæ A B, C D, in quas incidens eadem G O alternos angulos A G O, G O D æquales efficit, erunt (b) parallelæ. a 6. huius. b 2. huius.

IX.

Si duae rectae lineae A B, C E *parallelae fuerint, & aequales, etiam rectae* A C, B E, *quæ illarum extremitates conjungunt, aequales erunt, & parallelae*. Euclid. 33. I. Figura XIV.

Jungatur B C, quæ efficiet æquales (c) alternos angulos A B C, E C B; qui cùm ab æqualibus etiam lateribus A B, B C; E C, C B contineantur, æquales etiam erunt (d) baſes A C, B E; & angulus A C B angulo alterno E B C, unde (e) etiam rectæ A C, B E erunt parallelæ. c 6. huius. d 11. III. e 2. huius.

X.

In parallelogrammo A B E C *oppoſita latera, & anguli oppoſiti ſunt aequales*. Euclid. 34. I. Figura ead.

 Du-

Ducatur, ut antea, diameter B C, ſupra quam,
a 6. huius. veluti communem baſim, angulus A B C erit (a), ob parallelas A B, C E, æqualis angulo E C B; & angulus A C B, ob A C, B E ſimiliter parallelas, æqualis angulo E B C, adeoque etiam la-
b 10. III. tus A B erit (b) æquale lateri C E, & reliquum latus A C reliquo lateri B E; angulus etiam B A C angulo C E B, & integer angulus A B E integro angulo E C A.

XI.

Euclid. 46. I. Figura XV. Tab. 3. *Deſcribetur itaque quadratum ex datâ rectâ lineâ* A B, ſi erectis ad illam ex A, & B perpendicularibus auferantur ex illis partes A D, B E, quæ ſint æquales ipſi A B.

c 8x antec. Singula enim oppoſita latera rectanguli D B erunt (c) æqualia, & æquales etiam, & recti erunt omnes anguli.

XII.

Euclid. 2. pars 34. I. Inferri etiam obiter poterat, quod cùm ſingula triangulorum D E B, D A B latera ſint æqualia, etiam triangula ipſa erunt æqualia: adeoque *Parallelogrammum ſemper a diametro in duas aequales partes dividitur*.

XIII.

Euclid. 43. I. Figura ead. Quemadmodum etiam, *ſi in Parallelogrammo* D A B E *per quodlibet diametri punctum* I *ducantur rectæ* G H, C F *parallelæ lateribus parallelogrammi, paral-*

le-

lelogramma AI, IE, *quæ non ſecantur a diametro, & Complementa dicuntur, erunt æqualia.*

Si etenim ex æqualibus (a) triangulis DAB, DEB auferantur triangula DGI, ICB æqualia triangulis DFI, IHB, reliquum parallelogrammum AI erit (b) æquale reliquo parallelogrammo IE. a *Ax.* b *Ax.* 3.

XIV.

Quod ſi Parallelogrammum DABE *fuerit quadratum, etiam parallelogramma* DI, IB, *quae dividuntur a diametro, erunt quadrata partium* AC, CB. *Euclid. coroll.* 4. II.

Quoniam, ob æqualia latera DA, AB, angulus ABD, vel (c) GID, æqualis eſt angulo ADB, vel GDI, etiam latus DG erit (d) æquale lateri GI, unde (e) omnia quatuor parallelogrammi DI latera erunt æqualia: ſimiliter etiam oſtendi poterit omnia latera parallelogrammi IB æqualia eſſe, ergo cùm anguli parallelogrammorum DI, IB, ob latera parallela, æquales ſint (f) angulis rectis parallelogrammi, ſive quadrati DABE, ipſi quoque recti erunt, adeoque (g) parallelogramma ipſa DI, IB erunt quadrata ex lateribus GI, IH, ſive partium AC, CB. c 6. *huius.* d 17. III. e 10. *huius.* f 6. *huius.* g *Definit.* 5. *huius.*

XV.

Si aliquod trianguli ABC *latus* AC *producatur in* D, *externus angulus* BCD *erit aequalis utrique interno, ac oppoſito* BAC, ABC. *Eucl.* 32. I. Figura XIV. Tab. 2.

a 4. *hu.* Ducatur (a) per C recta CE parallela lateri
b 6. *hu.* AB, eritque (b) alternus angulus BCE æqualis
c 7. *hu* alterno ABC, & (c) externus ECD æqualis interno BAC, adeoque integer angulus externus BCD æqualis erit utrique interno, ac oppoſito BAC, ABC.

XVI.

Euclid. 2. pars 32. I. Si itaque addatur communis internus angulus ACB, *tres omnes anguli interni duobus conſequentibus* BCD, BCA, *hoc eſt duobus rectis, aequales erunt.*

XVII.

Unde ſi *duo quaecumque triangula duos angulos duobus angulis aequales habuerint, reliquus etiam angulus unius trianguli ſemper aequalis erit reliquo angulo alterius trianguli.*

XVIII.

Eucl. 16. I. *Exterior angulus* BCD *ſemper eſt major angulo quocumque interno, ac oppoſito: & duo interni quomodocumque ſumpti*
Eucl. 17. I. *duobus rectis minores erunt.*

XIX.

In quocumque trapezio, ſive quadrilatero ABEC *quatuor anguli erunt aequales quatuor rectis.* Dividi enim poterit quadrilaterum in duo triangula, ut tres
d *Ex 16. hu.* ſingulorum anguli duobus rectis ſint (d) æquales, adeoque ſex omnes anguli duorum triangulorum, ſive quatuor anguli

qua-

quadrilateri, quatuor rectis angulis æquales erunt.

XX.

In quacumque figurâ, ſive oppoſita latera parallela ſint, ſive non, numerus angulorum rectorum, quibus aequivalent omnes anguli ejuſdem figurae, duplus eſt numeri laterum, demptis quatuor. Fig. IV. Tab. 3.

Aſſumatur intra figuram punctum aliquod I, ex quo ducantur ad ſingulos angulos rectæ IA, IB, &c. divideturque figura in tot triangula quot ſunt latera in figurâ; tres autem anguli cujuſcumque trianguli duobus rectis æquivalent; adeoque numerus angulorum rectorum, quibus æquivalent omnes ſimul anguli omnium triangulorum, duplus erit numeri laterum; ſed omnes triangulorum anguli, qui verticem habent in I, quatuor rectis æquivalent (a), ergo reliqui triangulorum anguli, hoc eſt omnes anguli figuræ æquivalebunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ſunt ejuſdem figuræ latera. a 7. 111.

Digitized by Google

LIBER V.

De Lineis intra Circulum concurrentibus, & illarum Angulis.

Cum admirabilis, atque pulcherrima ſit Circuli natura, admirabiles etiam, atque pulcherrimæ ſunt proprietates illæ, vel accidentia, quæ conſiderantur in lineis, & angulis, qui in eodem Circulo continentur. Harum præcipuas præſenti libro breviter, & accuratè complectar; cetera, quæ ad figuras potiùs, aut ſuperficies, quàm ad lineas pertinent, opportuniùs, & uberiùs alibi traditurus.

DEFINITIONES.

I.

Circulus eſt figura, quæ continetur ab unicâ lineâ curvâ, cujus ſingulæ partes, aut puncta æqualiter diſtant ab uno puncto, quod intra curvam, ſive figuram reperitur.

II.

Generari verò, ſive deſcribi concipitur Circulus, cum alterutrâ alicujus rectæ lineæ extremi-

mi-

mitate immotâ manente, altera extremitas ejuſdem lineæ unà cum totâ lineâ tamdiu circumducitur, donec ad idem punctum, ex quo diſceſſerat, revertatur.

III.

Punctum illud immobile vocatur Circuli *Centrum*.

IV.

Curva, quæ a circumductâ lineæ extremitate deſcribitur, dicitur Peripheria, ſive *Circumferentia*, ejuſque partes dicuntur *Arcus*.

V.

Lineæ rectæ, quæ centrum, & aliquod peripheriæ punctum conjungunt, dicuntur *Radii*.

VI.

Linea, quæ per circuli centrum tranſiens circulum ipſum bifariam dividit, vocatur *Diameter*: atque illa circuli medietas, quæ ſemiperipheriâ, & diametro continetur, dicitur *Semicirculus*; ſi verò linea circulum ipſum in duas inæquales partes, quæ *Segmenta* circuli, ſive *portiones* appellantur, dividat, vocatur *Chorda*.

VII.

Circuli, qui deſcribuntur a radiis æqualibus, æquales erunt; adeoque mutuò ſuperimpoſiti congruent.

VIII.

Circuli concentrici dicuntur illi, qui circa idem centrum deſcripti fuerint, ſive, qui deſcribuntur a variis punctis ejuſdem lineæ circa centrum aliquod revolutæ: ut ex. gr. dum eadem recta DC circa centrum revolvitur illius punctum C deſcribit circulum CIF, punctum G deſcribit circulum GBA. Fig.IV. Tab.3.

IX.

Hinc in circulis concentricis radii D C, D E ſimiles arcus, ſive peripheriarum partes abſcindent, ut eadem nempe pars peripheriæ F E C ſit arcus C E, & peripheriæ A B G arcus B G. Cùm etenim recta D C, ſive illius duo puncta G, G æquabiliter moveantur, eadem pars erit arcus G B integræ peripheriæ minoris, quæ deſcribitur a puncto G, & arcus G E, peripheriæ majoris, quæ deſcribatur a puncto C.

Si itaque radii D C, D E, D I in alterutrâ peripheriâ æquales arcus abſcindant, in alterâ quoque æquales arcus ſecabunt.

X.

Angulus arcui *inſiſtere* dicitur, cum latera, ſive rectæ, quæ angulum continent, arcum ipſum intercipiunt, ut angulus A D B inſiſtit arcui A F E, angulus B A D arcui B D. Figura III.

XI.

Angulus ſemicirculo, vel alteri ſegmento, ſive portioni *inſcribi* dicitur, cum laterum extremitates cum extremitatibus ſemiperipheriæ, vel arcûs conveniunt, & anguli vertex aliquod ejuſdem arcûs punctum contingit; ut angulus A D B ſemicirculo; angulus B A D ſegmento B F A D; angulus A B D ſegmento A F B D inſcribitur.

XII.

Linea circulum *tangere* dicitur, vel circuli *tangens* vocatur cum peripheriam in uno puncto contingit, ſive punctum habet commune cum peripheriâ, ſed versûs utramque partem extenſa ipſam peripheriam nullibi ſecat, ſed tota extra ipſam cadit.

PRO-

PROPOSITIONES.

I.

SI linea AB, *quæ per circuli centrum ducatur, ſecuerit rectam, vel chordam* DE *biſariam in* F, *perpendiculariter illam ſecabit; aut e converſo, ſi perpendiculariter illam ſecuerit, biſariam quoque dividet.* *Euclid.* 3. III. Fig. I.

Junctis enim radiis CD, CE, erunt (a) in primo caſu ſingula trianguli CFD latera ſingulis lateribus trianguli CFE æqualia, adeoque etiam anguli conſequentes CFD, CFE æquales erunt (b), & recti. a Ex *def.* 19. III & *hypoth.* b 12. III.

At in ſecundo caſu, ob æquales radios, aut latera CD, CE, anguli CDF, CEF æquales erunt (c), ſed æquales etiam ſunt anguli recti CFD, CFE; ergo (d) reliquus etiam angulus DCF erit æqualis angulo reliquo ECF, adeoque triangula DCF, ECF, in quibus latera DC, CF ſunt æqualia lateribus EC, CF, & anguli DCF, ECF a lateribus ipſis æqualibus contenti ſunt æquales, baſis etiam DF erit (e) æqualis baſi FE, ſive recta DE biſariam dividetur in F. c 17. III. d 17. IV. e 11. III.

II.

Cùm ex puncto F, in quo recta DE biſariam dividitur, nulla alia recta erigi poſſit perpendicularis ad eandem DE, mani- *Euclid. coroll.* 1. III.

fe-

feſtè apparet, quod *circuli centrum, ex quo tranſire poſſit aliqua recta bifariam ſimul, & perpendiculariter dividens chordam* DE, *intra lineam* AB *reperitur*.

III.

Euclid. 1. III. *Invenietur itaque dati circuli centrum*, ſi ductâ quomodocumque chordâ DE, illa bifariam dividatur in F, erigaturque perpendicularis AB, quæ bifariam dividatur in C, nam punctum ipſum C erit dati circuli centrum.

a Ant. Cùm etenim circuli centrum intra rectam AB reperiatur (a), erit ipſum punctum C, in quo recta AB bifariam dividitur.

IV.

Euclid. 9. III. *Si ex aliquo puncto* C *tres aequales lineae* CG, CD, CE *ad peripheriam inciderint, erit* C *circuli centrum*.

Ducantur GD, DE, quibus bifariam diviſis in I, F jungantur IC, FC. Cùm itaque ſingula triangulorum GIC, DIC latera ſint (b) æqualia, recti quoque, & æquales erunt (c) illorum anguli GIC, DIC, adeoque circuli centrum erit (d) intra perpendicularem IH: ſingula quoque triangulorum DFC, EFC latera ſunt æqualia, unde etiam recti, & æquales erunt anguli DFC, EFC, & circuli centrum intra perpendicularem FA reperietur, ergo circuli centrum erit punctum C, quod eſt utrique perpendiculari IH, FA commune.

b Ex hypoth. & conſt. c 12. III. d 2. huius.

Per

V.

Per tria data puncta G, D, E *non in directum poſita, per quæ nimirum recta linea tranſire non poſſit, circulum deſcribere.*

Jungantur GD, DE, quibus biſariam diviſis in I, F erigantur perpendiculares ſe mutuò ſecantes in C, eritque punctum C centrum illius circuli, qui per ſingula puncta G, D, E tranſibit.

Ductis enim rectis GC, DC, EC, illæ oſtendentur, ut antea (a), inter ſe æquales, ergo ſi centro C, radio CG deſcribatur circulus, hic per alia etiam puncta D, E tranſibit. a *Ant.* & 11. III.

VI.

Similiter etiam *dato quolibet arcu* GBE *complebitur, ſive deſcribetur integra illius peripheria,* Euclid. 25. III.

Si aſſumpto puncto quolibet D, jungantur GD, DE, quibus biſariam diviſis in I, F erigantur perpendiculares ſe mutuò ſecantes in C; erit enim (b) punctum C centrum arcûs GDE, adeoque etiam integræ peripheriæ. b 4. *huius.*

VII.

In eodem, vel in aequalibus circulis aequales anguli ad centrum DCE, MON *aequalibus arcubus inſiſtunt: & e converſo aequales arcus aequales angulos ſubtendunt.* Euclid. 26. 27. III. Fig. I. & II.

Intelligantur enim radii DC, CE ſuperimponi, atque ob angulorum, quos continent, æqualitatem

a Def. tem, congruere (a) cum æqualibus radiis MO,
12. III. ON, cadentque puncta D, E ſuper alia puncta M, N, & integer arcus DBE ſuper arcum MLN. Quod ſi arcus ipſi conveniant, etiam puncta D, E cum punctis M, N, & radii
b ead. cum radiis convenient, ideoque (b) æquales an-
definit. gulos continebunt.

VIII.

Euclid. Similiter etiam *in eodem, aut aequali-*
28. 29. *bus circulis aequales chordae aequales*
III. *arcus abſcindunt; & aequales arcus a chordis aequalibus abſcinduntur.*

Poſitis enim æqualibus arcubus DBE, MLN, etiam anguli DCE, MON, qui a lateribus, ſive radiis æqualibus continentur, æquales
c ex erunt (c); adeoque etiam baſis DE erit (d) æqualis
antec. baſi MN; aut, ſi baſes DE, MN æquales po-
d 11. nantur, æquales etiam erunt (e) anguli DCE,
III. MON, ideoque etiam arcus DBE, MLN,
e 12. quibus inſiſtunt, æquales erunt.
III.

IX.

Euclid. *Arcus itaque datus* MLN *bifariam di-*
30. III. *videtur*, ſi ductis radiis MO, NO bifa-
Fig. II. riam dividatur (f) angulus MON. Cùm-
f 21.
III. que angulus ipſe MON bifariam in infinitum dividi poſſit, etiam quilibet datus arcus MLN in infinitum bifariam dividi poterit.

X.

Quæ verò de chordis, & arcubus demonſtravimus, ſi cum angulis verticem

in

in centro habentibus, comparentur, verificantur etiam in chordis ipſis, & arcubus, ſi cum angulis verticem in peripheriâ habentibus comparentur, cùm eadem ſit ratio angulorum ad centrum, aut peripheriam; quippe cùm iſti illorum dimidii ſint, ut in Prop. XIV. oſtendemus.

XI.

Si ſuper AB *circuli radium erigatur perpendicularis* BC, *haec circulum tanget in* B, *hoc eſt utrinque producta tota extra circulum cadet.* Euclid. 16. III. Figura III.

Cadat enim, ſi fieri poteſt, intra circulum, ejuſque peripheriam ſecet in D, jungaturque ED. Cùm itaque radii, ſive latera ED, EB ſint æqualia, etiam angulus EDB erit (a) æqualis angulo recto EBD; hoc eſt, erit uterque rectus, quod eſt (b) impoſſibile. a 17. III. b 18. IV.

XII.

Hinc facilè apparet, *quod ſi ex puncto* B, *in quo recta* BC, *circulum tangit, ducatur ad centrum radius* BE, *ſive diameter* BA, *hæc perpendicularis erit ad tangentem* BC: *& e converſo, ſi ex puncto contactûs* B *ſuper tangentem* BC *erigatur perpendicularis* BA, *illa per centrum tranſibit.* Euclid. 18. III. Euclid. 19. III.

XIII.

Ad datum circulum AB *ex dato puncto* C *tangentem ducere.* Euclid. 17. III. Fig. IV.

Jun-

Jungatur circuli centrum D, & punctum C rectâ DC, deſcribaturque radio DC circulus CF, tum ſuper DC erigatur ex puncto G perpendicularis GE, jungaturque DE, BC.

Cùm itaque triangula CDB, EDG communem angulum CDE habeant, & latera CD,
a 11. DB ſint æqualia lateribus ED, DG, erit (a) &
III. angulus DBC æqualis angulo recto DGE, adeoque rectus; unde recta CB perpendicularis ad circuli radium DB circulum ipſum tanget
b 11. in B (b).
huius.

XIV.

Euclid. *Si ſuper eodem arcu* AB *inſiſtat angu-*
20.III. *lus ad centrum* AIB, *& quilibet angu-*
Fig. V. *lus ad peripheriam* ACB, *vel* ADB, *vel* AEB, *angulus ad centrum ſemper duplus erit anguli ad peripheriam.*

In primo caſu cum utriuſque anguli AIB, ACB latera AI, AC conveniunt, patet ex-
c 15. teriorem angulum AIB, cùm ſit (c) æqualis duo-
IV. bus internis angulis ICB, IBC inter ſe æqua-
d 17. libus (d), duplum eſſe unius ex illis, hoc eſt an-
III. guli ad peripheriam ACB.

In ſecundo ducatur per centrum I diameter DG, eritque, ut antea, angulus AIG duplus anguli ADG, & angulus GIB duplus anguli GDB, adeoque integer angulus AIB duplus erit totius anguli ADB.

Denique in tertio caſu ductâ per centrum I diametro EF, erit angulus AIF duplus anguli AEF, & ablatus angulus BIF duplus abla-

ti

ti B E F, adeoque reliquus etiam angulus A I B erit duplus reliqui anguli A E B.

X V.

Anguli A C B, A D B, A E B, *qui ſuper eodem arcu, vel æqualibus arcubus inſiſtentes ad quodlibet peripheriæ punctum pertingunt, aequales erunt inter ſe.* *Euclid.* 21. III.

Quilibet etenim ex illis ſemper dimidius eſt (a) ejuſdem anguli A I B, qui ſuper eodem arcu inſiſtens ad circuli centrum pertingat. a *Ant.*

X V I.

Angulus A D B, *qui ſemicirculo inſcribitur eſt ſemper rectus.* *Euclid.* 31 III. Figura III.

Ducatur ex D per centrum E diameter D F, eritque (a) angulus A E F duplus anguli A D E, & angulus F E B duplus anguli E D B, adeoque duo ſimul anguli A E F, F E B dupli totius anguli A D B; cùm itaque duo ſimul anguli A E F, F E B ſint æquales (b) duobus rectis, angulus A D B æqualis uni recto, vel rectus erit. a 14. *huius.* b 7. III.

X V I I.

Si recta A B *circulum tangat in* C, *ducaturque chorda* C D *ſecans quomodocumque circulum in* C, D, *angulus* B C D, *qui a tangente cum chordâ efficitur, ſemper aequalis erit angulo* C E D, *qui in oppoſitâ, vel alternâ circuli portione deſcribitur, quemadmodum etiam angulus* A C D *erit aequalis angulo* C F D. *Euclid.* 32. III. Figura VI.

Eri-

Erigatur ex C diameter CG, jungaturque
a 12. GE. Erit ergo (a) angulus BCG rectus, & æqua-
hujus. lis angulo recto GEC (b); ſed angulus DCG æ-
b *Antec.* qualis eſt (c) angulo DEG, qui ſuper eodem ar-
cu GD inſiſtit, ergo reliquus etiam angulus
c 15. *huius*. BCD erit æqualis angulo reliquo CED. Simi-
liter junctâ GF demonſtrabitur angulus DFG
æqualis angulo DCG, quemadmodum angulus
rectus GFC æqualis eſt angulo recto GCA,
adeoque integer angulus DFC erit æqualis in-
tegro angulo DCA.

XVIII.

Euclid. 22. III. Sicuti duo conſequentes anguli ACD, BCD ſemper æquales ſunt duobus rectis, *anguli quoque* CED, CFD, *qui in quadrilatero* CEDF *circulo inſcripto opponuntur, duobus rectis æquales erunt.*

XIX.

Euclid. 2. IV. Figura VII. & VIII. *Hinc dato circulo inſcribi poterit ipſi triangulum, quod angulos omnes aequales habeat angulis dati trianguli* MNO.

Ductâ quomodocumqne rectâ AB, quæ cir-
d 22. III. culum tangat in C, fiat (d) angulus ACE æqua-
lis angulo OMN, & angulus BCD æqualis
e 17. angulo ONM, eritque (e) etiam angulus CED
huius. æqualis angulo OMN, angulus CDE æqua-
f 17. IV. lis angulo ONM, & reliquus (f) angulus
ECD æqualis angulo reliquo MON.

XX.

Si triangulum MNO, *aut aequiangulum ipſi* CED *circulo inſcriptum, ſit aequilaterum, erigaturque diameter* CG

per

per centrum H, *radius* HG *biſariam diuidetur a latere* ED *in* I.

Quoniam tres anguli trianguli CED (a), ſive a 17.
tres anguli ACE, ECD, DCB (b), æquales *III.*
ſunt inter ſe; & anguli quoque ACG, BCG b 17.
recti ſunt, & æquales, angulus ECD bifariam *huius.*
dividetur a diametro CG, ſicuti bifariam ab
ipsâ dividetur arcus EGD (c), vel chorda c 9.
ED (d). Angulus GED æqualis eſt (e) angu- *huius.*
lo GCD, ſive GCE; ſive, ob æqualia latera d 1.
HC, HE, angulo CEH (f), ſed angulus *huius.*
ECD, vel æqualis ipſi angulus CED duplus e 15.
eſt anguli ECH, ergo angulus CED duplus *huius.*
erit etiam anguli CEH, unde etiam angu- f 17.
lus HEI æqualis erit angulo CEH, vel an- *III.*
gulo IEG.

In triangulis itaque EIH, EIG, quæ ſuper eandem baſim EI habent angulum rectum EIH æqualem angulo recto EIG, & angulum HEI æqualem angulo GEI, erit (g) etiam baſis HI g 10.
æqualis baſi GI; ſive radius HG bifariam di- III.
videtur in I.

XXI.

Circumſcribetur etiam circulo dato triangulum æquiangulum dato triangulo MNO, *Eucl. 3. IV.*

Si extenſo utrinque latere MN fiat (h) in cir- h 22.
culo angulus ad centrum CHE æqualis angulo III.
externo PMO; & angulus CHD æqualis an-
gulo QNO, atque per puncta C, E, D du-
cantur (i) tangentes concurrentes in punctis A, i 15.
B, F, erit enim triangulum AFB triangulo *huius.*
dato MNO æquiangulum.

In quadrilatero A E H C quatuor anguli ſimul
a 19. IV. ſumpti æquales ſunt quatuor rectis (a), cùm igitur, ob tangentes, duo anguli AEH, ACH ſint duo recti, reliqui duo EHC, EAC ſimul ſumpti duobus rectis æquales erunt, adeoque æquales
b 6. III. erunt (b) angulis P M O, N M O; ſed poſitus eſt angulus E H C æqualis angulo P M O, ergo reliquus etiam angulus E A C erit æqualis angulo N M O. Similiter etiam oſtendetur angulus B æqualis angulo N, & reliquus angulus F
c 17. IV. æqualis (c) angulo O, ideoque triangulum A F B circulo circumſcriptum æquiangulum erit dato triangulo M N O.

XXII.

Si itaque *tres anguli ad centrum* C H E, E H D, D H C *fuerint æquales, etiam anguli* A, F, B *aequales erunt, ideoque triangulum circulo circumſcriptum aequilaterum erit.*

XXIII.

Quemadmodum etiam, *ſi triangulum* C E D *circulo inſcriptum fuerit aequilaterum, atque per puncta* C, E, D *ducantur tangentes concurrentes in* A, F, B, *etiam triangulum circulo circumſcriptum aequilaterum erit.*

Si etenim tres anguli ad circumferentiam C, E, D æquales eſſent, eſſent etiam æquales an-
d 14. huius. guli ad centrum; qui illorum ſunt dupli (d), ideoque (e) triangulum circulo circumſcriptum
e Ant. æquilaterum foret.

Cum

XXIV.

Cùm latera AC, BC ſint (a) æqualia a 9.
eidem lateri oppoſito ED, erunt æqualia IV.
etiam inter ſe, adeoque *ſingula trianguli circumſcripti latera bifariam dividentur in punctis* C, E, D; *& perpendicularis etiam* FC *bifariam dividetur in* I.

XXV.

Hinc *ex dato circulo auferetur aliqua portio, quae contineat angulum angulo dato* MON *aequalem.* Euclid. 34. *III.* Figura VI.

Ducatur (b) enim quomodocumque recta AB circulum tangens in C, ducaturque chorda CE, quæ cum tangente efficiat (c) angulum ACE dato angulo æqualem, eritque (d) angulus, qui in portione CDGE deſcribatur, ſemper æqualis angulo ACE, hoc eſt angulo dato MON. VII. VIII. b 13. *huius.* c 22. *III.* d 17. *huius.*

XXVI.

Oſtendi poſtremò poterit, quomodo *dividatur circuli dati* AEDFBG Fig. V.
circumferentia in eâdem ratione, quâ diviſa fuerit alterius circuli ADBF *circumferentia in* D, B. Figura III.

Auferatur enim ex dato circulo portio AEDCFB, quæ contineat (e) angulum ADB e *Ant.*
æqualem angulo DAB, qui continetur in portione datâ alterius circuli, eritque (f) etiam f 14.
angulus ad centrum AIB æqualis angulo *huius.*

Digitized by Google

ad centrum D E B, adeoque arcus A G B, & arcus alterius circuli B D erunt (a) partes ſimiles ſuarum peripheriarum, ſive peripheriæ ipſæ in eâdem ratione dividentur in punctis A, B, & B, D.

a *Def.* 9. *hui.*

LIBER VI.

De Figuris Rectilineis, earumque Proportione.

ALtera continuæ Quantitatis ſpecies, quæ varia nimirum Figurarum genera, & accidentia complectitur, traditis hactenus iis, quæ ad ſuperficierum terminos, ſive lineas pertinebant, nunc contemplanda, vel exponenda mihi occurrit. Atque a triangulis quidem, & quadrilateris Figuris exordiar, illarumque magnitudinem comparabo, ut earum æqualitas, vel alia quæcumque proportio demonſtretur, quæ deinde ad ſingula quotlibet, etiam infinitorum laterum, Poligona transferri facilè poterunt. Iterum quoque monuiſſe juverit, ad hunc locum ea referri oportere, quæ de triangulis inter ſe æqualibus, aut inæqualibus lib. III. num. 13., & 16.; & de Parallelogrammi partibus lib. IV. num. 12., & 13. obiter deduxi, ut illa proinde veluti initio hujus libri propoſita, ac demonſtrata cenſeri debeant.

PROPOSITIONES.

I.

Eucl. 1. VI. Figura IX. P*Arallelogramma* ABCD, EFGH *aequè alta, hoc eſt inter eaſdem Parallelas conſtituta, ſunt inter ſe ut baſes* AD, EH.

a 4. IV. Per quodlibet punctum I ducatur (a) IM baſi-
b 10. IV. bus parallela. Erit (b) itaque IK ſemper æqualis ipſi AD, & LM ſemper æqualis ipſi EH, adeoque IK ad LM ſemper erit ut AD ad
c 9. I. EH, atque ita ſemper, ergo (c) omnes rectæ, quæ componunt parallelogrammum AC, nempe parallelogrammum ipſum AC, erunt ad totidem rectas omnes, quæ componunt parallelogrammum EG, nempe ad parallelogrammum ipſum EG, ut prima AD ad primam EH, hoc eſt ut baſis ad baſim.

II.

Fig. X. Facilè apparet, quod *ſi ex punctis* B, C *demittantur* BE, CF *perpendiculares ad baſim, parallelogrammum rectangulum* EBCF *erit aequale parallelogrammo obliquo* ABCD.

d 10. IV. Semper enim recta MN in parallelogrammo rectangulo, & GH in parallelogrammo obli-
e Ax. 7. quo erunt (d) æquales eidem rectæ BC, adeoque etiam (e) inter ſe.

III.

Eucl. 1. VI. Figura IX. *Triangula quoque* ACD, EGH, *quæ in eâdem altitudine, hoc eſt inter eaſ-*

eaſdem parallelas, conſtituta fuerint, erunt ut baſes AD, EH.

Si etenim ducatur (a) AB parallela lateri DC, atque EF parallela lateri HG, parallelogramma AC, EG erunt (b) ut baſes, adeoque etiam triangula, quæ parallelogrammorum dimidia ſunt (c) erunt, ut baſes. a 4. IV. b 1. *huius.* c 12. IV.

IV.

Quod ſi *parallelogramma* AC, AH, *ſive triangula* ACD, AHD *habuerint eandem baſim* AD, *ac inæquales altitudines, hoc eſt inter eaſdem parallelas conſtituta non fuerint, erunt ut altitudines, ſive perpendiculares* BE, *ſive* CF, HK. Fig. X.

Concipiatur enim perpendicularis BE veluti baſis rectanguli EC, & perpendicularis ME, veluti baſis rectanguli EN, eritque (d) rectangulum EC ad rectangulum EN, ſive IH, hoc eſt (e) parallelogrammum AC ad parallelogrammum AH, ſive (f) triangulum ACD ad triangulum AHD ut BE ad EM, ſive HK. d 1. *huius.* e 2. *huius.* f 12. IV.

V.

Si itaque parallelogramma, ſive triangula ſuper eâdem, aut æqualibus baſibus conſtituta fuerint, ac in eâdem altitudine, hoc eſt inter eaſdem parallelas, erunt æqualia. *Euclid.* 35. 36. 37. 38. I.

Cùm etenim ſint (g) in ratione baſium, quæ ſunt ex hypotheſi æquales, ipſa quoque erunt æqualia. g 1. 3. *huius.*

PROPOSITIONES.

I.

Eucl. 1. VI. Figura IX. *PArallelogramma* ABCD, EFGH *aequè alta, hoc eſt inter eaſdem Parallelas conſtituta, ſunt inter ſe ut baſes* AD, EH.

a 4. IV. Per quodlibet punctum I ducatur (a) IM baſibus parallela. Erit (b) itaque IK ſemper æqualis
b 10. IV. ipſi AD, & LM ſemper æqualis ipſi EH, adeoque IK ad LM ſemper erit ut AD ad
c 9. *I.* EH, atque ita ſemper, ergo (c) omnes rectæ, quæ componunt parallelogrammum AC, nempe parallelogrammum ipſum AC, erunt ad totidem rectas omnes, quæ componunt parallelogrammum EG, nempe ad parallelogrammum ipſum EG, ut prima AD ad primam EH, hoc eſt ut baſis ad baſim.

II.

Fig. X. Facilè apparet, quod *ſi ex punctis* B, C *demittantur* BE, CF *perpendiculares ad baſim, parallelogrammum rectangulum* EBCF *erit aequale parallelogrammo obliquo* ABCD.

d 10. IV. Semper enim recta MN in parallelogrammo rectangulo, & GH in parallelogrammo obli-
e *Ax.* 7. quo erunt (d) æquales eidem rectæ BC, adeoque etiam (e) inter ſe.

III.

Eucl. 1. VI. Figura IX. *Triangula quoque* ACD, EGH, *quæ in eâdem altitudine, hoc eſt inter* *eaſ-*

eaſdem parallelas, conſtituta fuerint, erunt ut baſes AD, EH.

Si etenim ducatur (a) AB parallela lateri DC, atque EF parallela lateri HG, parallelogramma AC, EG erunt (b) ut baſes, adeoque etiam triangula, quæ parallelogrammorum dimidia ſunt (c) erunt, ut baſes. a 4. IV. b 1. huius. c 12. IV.

IV.

Quod ſi *parallelogramma* AC, AH, *ſive triangula* ACD, AHD *habuerint eandem baſim* AD, *ac inæquales altitudines, hoc eſt inter eaſdem parallelas conſtituta non fuerint, erunt ut altitudines, ſive perpendiculares* BE, *ſive* CF, HK. Fig. X.

Concipiatur enim perpendicularis BE veluti baſis rectanguli EC, & perpendicularis ME, veluti baſis rectanguli EN, eritque (d) rectangulum EC ad rectangulum EN, ſive IH, hoc eſt (e) parallelogrammum AC ad parallelogrammum AH, ſive (f) triangulum ACD ad triangulum AHD ut BE ad EM, ſive HK. d 1. huius. e 2. huius. f 12. IV.

V.

Si itaque parallelogramma, ſive triangula ſuper eâdem, aut æqualibus baſibus conſtituta fuerint, ac in eâdem altitudine, hoc eſt inter eaſdem parallelas, erunt æqualia. Euclid. 35. 36. 37. 38. I.

Cùm etenim ſint (g) in ratione baſium, quæ ſunt ex hypotheſi æquales, ipſa quoque erunt æqualia. g 1. 3. huius.

VI.

Eucl. 39. 40. I. *Et e converſo, ſi parallelogramma, ſive triangula æqualia ſint, ac ſuper eâdem, vel æqualibus baſibus conſtituta, etiam illorum altitudines æquales erunt, hoc eſt inter eaſdem parallelas reperientur.*

a 4. huius. Cùm etenim ſint ut altitudines (a), ſi iſtæ inæquales eſſent, ipſa quoque inæqualia forent contra hypotheſim.

VII.

Eucl. 41. I. Figura XI. *Si triangulum* ABC, *atque parallelogrammum* ADEC *ſuper eâdem baſi, ac inter eaſdem parallelas conſtituta fuerint, erit parallelogrammum duplum trianguli.*

b 5. huius. c 12. IV. Ductâ diametro CD, erit (b) triangulum ABC æquale triangulo ADC, hoc (c) eſt æquale dimidio parallelogrammi ADEC, ergo parallelogrammum duplum erit trianguli.

VIII.

Eucl. 42. I. *Hinc dato triangulo* ABF, *ad quemcumque angulum datum* CAD, *fieri poterit ipſi æquale parallelogrammum,*

Si bifariam diviſâ baſi AF in C per B, & C extendanturque rectæ BD, CE rectis d Ant. AF, DA parallelæ. Jungatur enim CB, erit- e 3. huius. que tam parallelogrammum AE (d), quàm triangulum ABF (e) duplum ejuſdem trianguli ABC, f Ax. 8. adeoque parallelogrammum erit (f) æquale dato triangulo.

IX.

Si duo parallelogramma A B C D, D E F G *circa aequales angulos ad* D *poſitos latera reciprocè proportionalia habuerint, hoc eſt ſit* A D *ad* D E *ut* G D *ad* D C, *parallelogramma erunt aequalia.* Eucl. 2. pars 14. VI. Figura XIII.

Extenſis enim B C, & F E concurrentibus in H, erit (a) parallelogrammum A C ad C E ut recta A D ad D E, & parallelogrammum G E ad idem C E ut recta G D ad D C, hoc eſt, ex hypotheſi, in eâdem ratione A D ad D E, adeoque parallelogrammum A C erit (b) aequale parallelogrammo G E. a 1. huius. b Ax. 2. I.

X.

Quod ſi e converſo parallelogramma aequalia ſupponantur, habebunt latera circa aequales angulos reciprocè proportionalia. Eucl. 1. pars 14. VI.

Erit enim (c) parallelogrammum A C ad C E, ſive recta A D ad D E, ut parallelogrammum G E ad C E; ſive recta G D ad D C. c Ax. 1. I. & 1. hui.

XI.

Triangula quoque A D C, E D G, *ſi circa aequales angulos latera reciprocè proportionalia habuerint, erunt aequalia: & e converſo.* Eucl. 15. VI.

Eandem enim rationem habent triangula, quam parallelogramma, quorum dimidia ſunt.

XII.

Eucl. 16. VI. Figura XIII. & XIV. *Si fuerit* AD *ad* DE *ut* GD *ad* DC, *rectangulum ex extremis* AD, DC *erit æquale rectangulo ex intermediis* DE, GD: *& è converſo.*

Ponantur extremæ, & intermediæ, ut in directum jaceant, & æquales angulos contineant, compleanturque parallelogramma AC, GE; erunt itaque horum parallelogrammorum

a 19. huius. latera in reciprocâ proportione, adeoque erunt (a) æqualia.

Quodſi e converſo parallelogrammum ex extremis æquale fuerit parallelogrammo ex inter-

b 10. huius. mediis, erunt (b) illorum latera reciprocè proportionalia; hoc eſt AD ad DE, ut GD ad DC.

XIII.

Eucl. 17. VI. *Quod ſi intermediae fuerint aequales, ſive ſi tres rectae ſint in continuâ proportione, rectangulum ex extremis erit aequale quadrato unius intermediae, ſive ſecundae: & e converſo.*

Nam rectangulum ex duabus intermediis æ-

d Def. 5. IV. qualibus idem eſt (d), ac quadratum alterutrius.

XIV.

Eucl. 5. II. Figura XV. *Si recta linea* AB *utcumque ſecta fuerit in* C; *& aſſumptâ* BH, *quae ſit aequalis ipſi* CB *compleatur rectangulum* AH, *erit rectangulum ipſum* AH *aequale quadrato ex parte* CB *unà cum rectangulo ex partibus ipſis* AC, CB,

ſive CI, *quadrato nimirum* CH, *& rectangulo* AI.

Quod ex ipsâ figurâ manifeſtiſſimè apparet.

XV.

Si recta AB *quomodocumque dividatur in* C, *quadratum ex totâ* AB *erit aequale quadratis utriuſque partis* AC, CB, *ac inſuper rectangulo ex partibus ipſis* AC, CB *bis ſumpto.* Eucl. 4. II.

Ductâ diametro DB, rectâque CF, lateri BE parallelâ, atque per punctum I rectâ GH lateri AB parallelâ, rectangulum GF erit (a) quadratum partis GI, vel AC; & rectangulum CH erit quadratum partis CB; rectangulum verò AI, vel ipſi æquale (b) rectangulum aliud IE, eſt rectangulum ex partibus AC, CI, vel CB, ergo totum quadratum AE, quod his quatuor rectangulis eſt æquale, erit æquale quadrato utriuſque partis unà cum rectangulo partium bis ſumpto.

a 14. IV.

b 13. IV.

XVI.

Si itaque recta AB *bifariam diviſa foret in* C, *quadratum ex integrâ* AB *quadruplum foret quadrati ex dimidiâ* AC. Figura XVI.

Tunc enim rectangulum ex partibus AC, CB eſſet (c) æquale quadrato ex parte AC, vel CB.

c Def. 5. IV.

XVII.

Si recta MA eſſet æqualis rectæ AB, ſi nempe *recta* MB *bifariam divideretur* Eucl. 5. II.

in

in A, *& inæqualiter in* C, *rectangulum ex inæqualibus partibus* MC, CB *unà cum quadrato ex intermediâ* AC *eſſet æquale quadrato ex dimidiâ* AB.

a 5. huius. Rectangulum enim OA eſſet (a) æquale rectangulo AH, vel EC; additoque communiter rectangulo AI, rectangulum OC eſſet æquale rectangulis EC, CG; additoque rurſus communiter quadrato DI, rectangulum ex inæqualibus partibus MC, CB, nempe rectangulum OC unà cum quadrato DI ex intermediâ AC eſſet æquale quadrato AE ex dimidiâ AB.

XVIII.

Eucl. 6. II. Quod ſi aſſumpta fuerit NA æqualis rectæ AC; *ſi nempe linea* NC *bifariam dividatur in* A, *adjiciaturque ſegmentum* CB, *erit rectangulum* NH, *vel ipſi æquale rectangulum* MI, *unà cum quadrato ex* AC *æquale quadrato ex* AB.

Sive *ſi recta* DA *bifariam dividatur in* E, *adjungaturque ipſi quodlibet ſegmentum* AF, *erit rectangulum ex* DF *in* FA *unà cum quadrato ex intermediâ, ſive dimidiâ* EA *æquale quadrato ex integrâ* EF.

b 11. IV. c 15. huius. Ponatur FG æqualis ipſi AF, ſive deſcribatur (b) quadratum ex AF. Quadratum ex EF eſt (c) æquale quadrato ex AF nempe quadrato AG, unà cum rectangulo ex EA in AF, ſive

AI

AI bis ſumpto, hoc eſt rectangulo DI, unà cum quadrato alterius partis EA, ergo quadratum ipſum ex EF erit æquale rectangulo DG unà cum quadrato ex EA.

XIX.

Si recta DE *parallela fuerit baſi* AC, *trianguli latera* AB, CB *proportionaliter ſecabuntur, hoc eſt erit* AD *ad* DB, *ut* CE *ad* EB. *Eucl. 2. VI. Figura XII.*

Junctis enim AE, CD triangula DAE, ECD ſuper eâdem baſi DE, & inter eaſdem parallelas DE, AC conſtituta erunt (a) æqualia, adeoque erit (b) triangulum AED ad triangulum DEB, ut triangulum CDE ad idem triangulum EDB; ſed triangulum AED ad triangulum DEB eſt (c) ut AD ad DB, & triangulum CDE ad EDB eſt ut CE ad EB, ergo AD ad DB erit ut CE ad EB. *a 5. huius. b Ax. 1. I. c 5. huius.*

XX.

Quod ſi e converſo ponatur AD *ad* DB *ut* CE *ad* EB, *erit recta* DE *parallela baſi* AC. *Eucl. 2. pars 2. VI.*

Triangulum enim AED eſſet (d) ad DEB ut triangulum CDE ad idem DEB, adeoque triangula AED, CED ſuper eâdem baſi poſita æqualia forent (e), & conſequenter recta DE eſſet (f) parallela rectæ, vel baſi AC. *d Ex 3. hui. & hyp. e Ax. 2. I. f 6. huius.*

XXI.

Hinc facile eſt propoſitam rectam lineam AB *in eâdem ratione dividere, quâ alia recta* CB *diviſa fuerit in* E. *Eucl. 10. VI.*

Hinc

a 4. IV. Jungatur enim A C, cui parallela ducatur (a) ex puncto E recta E D; erit (b) ergo A D ad
b 19. huius. D B ut C E ad E B, vel componendo A B ad B D ut C B ad B E.

XXII.

Eucl. 9. VI. Hinc etiam *ex datâ rectâ* A B *imperata pars, ex. gr. tertia, auferri poteſt.*

Si aſſumptâ qualibet rectâ B E aliæ duæ ipſi
c Poſt. & prop. 4. III. æquales ponantur (c) E G, G C, & junctâ C A ducatur ipſi per E parallela recta D E; ſemper enim erit (d) A D ad D B, ut C E ad E B,
d 19. huius. & componendo A B ad B D ut C B ad B E.

XXIII.

Eucl. 11. VI. *Datis duabus rectis* B D, D A *tertia proportionalis invenietur,*

Si aſſumptâ B E, quæ ſit æqualis ipſi D A, jungatur E D, & ipſi per A parallela ducatur A C; erit enim B D ad D A ut B E, vel eadem D A, ad E C.

XXIV.

Eucl. 12. VI. *Quarta ſimiliter proportionalis poſt tres datas lineas* B D, D A, B E *invenietur,*

Si junctâ E D ducatur ipſi per A parallela recta A C; ſemper enim B D erit ad D A ut B E ad E C.

LIBER

LIBER VII.

De Figuris ſimilibus, earumque Proportione.

CUM maxima, & infinita ſit illa varietas, quæ in figuris rectilineis, partim ex angulorum, partim ex laterum magnitudine, quæ nullâ certâ, conſtantique lege, vel numero continetur, oriri ſolet, maximus etiam, & incredibilis eſt figurarum numerus, quas aliquâ ratione inter ſe conferri, vel comparari poſſe jam dixi. Nobilior eſt tamen, utilior, atque jucundior illarum contemplatio, quæ, cùm certo quodam, & æquali laterum, angulorumque numero componantur, inter ſe *ſimiles* vocari ſolent; atque illarum præſertim, quæ ſingula latera, & angulos æquales habent, unde Poligona, ſive figuræ *regulares* dicuntur. Eximias itaque illarum proprietates breviter, & accuratè hìc exponam: atque non illuſtriores modò Euclidis propoſitiones, verùm etiam plura Pappi, & Archimedis inventa, quæ præſertim ad Circuli figurarum, ſive poligonorum omnium pulcherrimæ dimenſionem pertinent, complectar.

DE-

Google

DEFINITIONES.

I.

FIguræ *ſimiles* dicuntur illæ, quæ cùm totidem angulis, atque lateribus conſtent, ſingulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.

II.

Euclid. 31. VI. Fig. I. Unde Figuræ ABC, IGC, quæ ſimiles ſint eidem figuræ DEF, inter ſe quoque ſimiles erunt, nam præter æquales angulos, erit in ipſis eadem laterum proportio.

III.

Circuli quoque figuræ ſimiles ſunt, quòd totidem, hoc eſt infinitis lateribus, & angulis componantur, atque figuræ ſimiles rectilineæ ipſis inſcriptæ in circulos ipſos tandem deſinant.

IV.

Poligonum *regulare* vocatur illud, in quo omnes anguli, & omnia latera ſunt æqualia.

V.

Fig. V. Hinc Poligonum regulare circulo inſcribi concipitur, ubi circuli peripheriâ in plures æquales partes diviſâ conjungantur puncta diviſionis lineis, vel chordis æqualibus LM, MN, &c.

VI.

Circuli centrum V etiam Poligoni *centrum* erit, ex quo radii VL, VM, VN, &c. ad angulos Poligoni æquales ducuntur.

VII.

Perpendicularis autem VQ ad poligoni latus, vel circuli chordam LM vocatur *catetus*.

VIII. E-

VIII.

Ejuſmodi verò poligona regularia ex vario laterum numero nomen deſumunt, ut aliud triangulum, aliud quadratum, pentagonum, hexagonum dicatur.

IX.

Figurarum, ſive Poligonorum perimeter ſunt omnia ſimul latera, a quibus illorum ſuperficies continetur.

X.

Iſoperimetræ figuræ dicuntur illæ, quæ æquales perimetros, ſive circumferentias habent, hoc eſt ab æqualibus perimetris continentur.

PROPOSITIONES.

I.

Si triangula ABC, DEF *æquiangula fuerint, erunt ſimilia; eritque* AC *ad* CB *ut* DF *ad* FE; CB *ad* BA *ut* FE *ad* ED; BA *ad* AC *ut* ED *ad* DF. *Euclid.* 4. *VI.* Fig. I.

Ex lateribus AC, BC abſcindantur (a) partes CI, CG, quæ ſint æquales lateribus FD, FE, eritque (b), ob angulos ICG, DFE ex hypotheſi æquales, triangulum IGC æquale triangulo DEF, & anguli GIC, CGI æquales angulis EDF, FED, vel ex hypotheſi angulis BAC, CBA; adeoque (c) recta IG erit parallela rectæ AB; ducatur inſuper GH parallela rectæ AC.

a 4. III.
b 11. *III.*
c 3. *IV.*

Quoniam itaque ob HG, AC parallelas, a 19.*VI.* BH ad HA eſt (a) ut BG, ad GC; erit componendo ut BA ad AH, ita BC ad CG; permutandoque BA ad BC, ut AH, vel IG ad GC, ſive DE ad EF: ſimiliter etiam, ob IG, & AB parallelas, erit AI ad IC, ut BG ad GC, & componendo BC ad CG, ut AC ad CI, permutandoque BC ad CA, ut GC ad CI, ſive EF ad FD; unde etiam ex æquo erit AB ad AC, ut GI ad IC, ſive ED ad DF.

II.

Hinc manifeſtè apparet, quod *ſi in triangulo* ABC *ducatur recta* HG *parallela baſi* AC, *triangulum* HBG *erit ſimile triangulo* ABC, *ideoque erit baſis* AC *ad baſim* HG *ut latus* AB *ad latus* HB.

III.

Euclid. 24. IV. Figura XV. Tab. 3. *Si* itaque *in rectâ* BD, *quæ ſit diameter alicujus parallelogrammi* ABED, *aſſumatur aliquod punctum* I, *extendanturque per ipſum rectæ* CF, GH *parallelogrammi lateribus parallelæ, erunt parallelogramma* DI, IB, *quæ dividuntur a diametro, inter ſe, totique parallelogrammo* DB *ſimilia*.

b *Ant.* Cùm etenim ſit (b), ob rectas AD, CI, & DE, IH parallelas, tam AB ad BC, quàm EB ad BH, ut DB ad BI, adeoque AB ad BC, ut EB ad BH, permutando erit AB ad BE, ut

CB

CB ad BH; atque ita de ſingulis lateribus, quæ circa æquales angulos reperiuntur, ergo parallelogrammum IB ſimile erit parallelogrammo DB. Similiter oſtendetur parallelogrammum DI ſimile eidem parallelogrammo DB, ideoque (a) parallelogramma DI, IB inter ſe quoque ſimilia erunt. a *Ax.* 9. I.

IV.

Quod ſi è converſo ſimilia ſint, erunt circa diametrum conſtituta.

Si etenim aliquod parallelogrammum PB non circa diametrum DB conſtitutum dicatur ſimile parallelogrammo DB, eſſet EB ad BQ ut AB ad BC, ſive DB ad BI, ſive eadem EB ad BH unde (b) BQ, BH æquales eſſent, quod repugnat. b *Ax.* 2. *I.*

V.

Si duo triangula ABC, DEF *circa æquales angulos* ACB, DFE *habuerint latera proportionalia, ſit nempe* AC *ad* CB, *ut* DF *ad* FE, *reliquos etiam angulos æquales habebunt, eruntque ſimilia.* *Euclid.* 6. VI Figura I. Tab. 4.

Ponantur, ut antea, latera IC, CG æqualia lateribus DF, FE, eritque ex hypotheſi ut AC ad CB ita IC ad CG; permutandoque AC ad CI, ut BC ad CG; ideoque (c) recta IG parallela lateri AB, atque (d) triangulum IGC, vel ipſi æquale, ac ſimile triangulum DEF, ſimile triangulo ABC. c 20. VI. d 2. *hujus.*

VI.

Triangula ſimilia ABC, DEF *ſunt in duplicatâ ratione laterum homologorum* AC, DF. *Euclid.* 19. VI.

Ponatur, ut antea, triangulum I GC æquale
a 1. II. triangulo DEF, jungaturque BI. Erit (a) triangulum ABC ad triangulum IGC in ratione compoſitâ ex ratione trianguli ABC ad trian-
b. 3. VI. gulum IBC, nimirum (b) ex ratione baſis AC ad baſim IC, & ex ratione trianguli IBC ad
c *Ead.* triangulum IGC, nimirum (c) lateris BC ad la-
d 19. VI. tus CG; ſed ratio lateris BC ad CG eſt (d) eadem ac ratio baſis AC ad CI, ergo ratio trianguli ABC ad triangulum IGC, vel DEF, erit duplicata rationis lateris AC ad DF; ſive triangula ſimilia ſunt inter ſe induplicatâ ratione laterum homologorum.

VII.

Euclid. *Poligona ſimilia* ABCDE, FGHIK
20. VI. *quorumcumque laterum ſunt in duplicatâ*
Figura II. *ratione laterum homologorum* AB, FG.

Diviſis bifariam in L, S lateribus homologis AE, FK ponatur LM æqualis ipſi FS, erigaturque recta MN, quæ parallela ſit lateri AB, & æqualis lateri FG, extendaturque per B, N recta BQ; junctiſque QC, QD abſcindatur ex FK recta FT æqualis rectæ MQ, conjungaturque TG, TH, TI: deinde ducatur ex N recta NO parallela lateri BC, & ex O recta OP parallela lateri CD, denique per punctum P recta PR parallela lateri DE.

e 11. III. Triangulum itaque MNQ erit (e) æquale tri-
f 2. *hujus*. angulo FGT, & ſimile (f) triangulo ABQ; unde angulus MNQ, vel (g) ABQ, erit æqualis
g 7. IV. angulo FGT; ſed integer angulus ABC erat æqualis angulo FGH, ergo etiam reliquus an-
h 7. *IV.* gulus QBC, vel (h) QNO, erit æqualis angulo

reli-

reliquo TGH; ſicuti, quia AB ad MN eſt (a) ut BQ ad QN, vel BC ad NO, permutandoque ut MN ad NO, ita AB ad BC, vel ex hypotheſi, FG ad GH; eſtque MN æqualis ipſi FG, erit & NO æqualis ipſi GH; ideoque triangulum quoque NOQ erit æquale triangulo GHT, & ſimile triangulo BCQ; atque ita ſemper de ſingulis triangulis oſtendetur, ergo poligonum MNOPR erit æquale, ac ſimile poligono FGHIK. Cùm itaque ſingula triangula poligoni majoris ſint in duplicatâ ratione laterum homologorum, quæ ratio ex hypotheſi ſemper eſt eadem, erit ratio omnium triangulorum, ſive poligoni majoris ABCDE ad poligonum minus duplicata rationis unius lateris AB ad homologum latus FG. a 2. huius.

VIII.

Si itaque poſt homologa latera AC, DF *ſumatur tertia proportionalis* X, *&* *poſt* AE, FK *ponatur tertia proportionalis* Z, *erit ut prima recta* AC *ad tertiam* X *ita figura, ſive poligonum ſuper* AC *ad figuram, ſive poligonum ſimile, quod ſuper* DF *deſcribatur; atque ut* AE *ad* Z *ita poligonum ſuper* AE *ad poligonum ſuper* FK. Fig. I. Fig. II.

Etenim, ob tres AC, DF, X continuè proportionales, erit (b) AC ad X in duplicatâ ratione ejuſdem AC ad DF, hoc eſt (c) ut figura ABC ad figuram ſimilem DEF; eademque ratione erit AE ad Z ut poligonum ſuper AE ad poligonum ſimile ſuper FK. b Ex 5. II. c 6. huius.

IX.

Euclid. 22. VI. Fig. I. & II. *Unde ſi duæ figuræ ſimiles* ABC, DEF, *eandem inter ſe rationem habuerint, quam aliæ duæ figuræ inter ſe ſimiles* ABCDE, FGHIK *habeant, erit etiam ratio inter homologa duarum priorum figurarum latera* AC, DF *ſimilis, aut eadem cum ratione, quae inter homologa duarum poſteriorum latera* AE, FK *reperitur; & e converſo, ſi latera homologa proportionalia fuerint, etiam figuræ ſimiles ſuper ipſa deſcriptæ proportionales erunt.*

Si enim ratio duplicata laterum homologorum, hoc eſt figurarum ſimilium, eſt ex hypotheſi æqualis, etiam ratio ſimplex eorundem laterum
a 2. & æqualis erit (a); & e converſo, ſi ratio directa,
4. *II.* vel ſimplex laterum eſt æqualis ex hypotheſi, etiam ratio duplicata eorumdem laterum, hoc eſt ratio figurarum ſimilium, æqualis erit.

X.

Eucl. I. XII. Fig. IV. & V. *Poligona regularia ſunt in duplicatâ ratione radiorum, ſeu perpendicularium.*

b *Ex I. V.* Quoniam æquales anguli BIC, LVM bifariam dividuntur (a) a perpendicularibus IH, VQ erit angulus HIC æqualis angulo QVM;
b 17. IV. ſed æquales etiam ſunt anguli recti IHC, VQM, ergo (b) triangula IHC, VQM æquiangula ſunt, ac ſimilia; adeoque (c) ratio radii
c 1. *huius.* IC ad radium VM, ſive perpendicularis IH,

ad

ad perpendicularem VQ erit eadem ac ratio lateris HC, ad QM, ſive integri lateris BC ad LM; ſed poligona ſunt inter ſe (a) in duplicatâ ratione laterum BC, LM, ergo erunt etiam in duplicatâ ratione radiorum, ſeu perpendicularium IH, VQ. a 7. *hujus.*

XI.

Circuli quoque *ſunt in duplicatâ ratione radiorum, ſive ut illorum quadrata.* *Euclid.* 2. *XII.*

Sunt enim circuli poligona infinitorum laterum, atque perpendicularis ad illa latera eſt radius ipſe. Fig. III.

XII.

Etiam *ſectores ſimiles* ANBD, EIFD *ſunt in duplicatâ ratione radiorum.*

Sunt enim inter ſe (b) ut integri circuli, quorum partes ſimiles ſunt. b *Ax.* 15. *I.*

XIII.

Poligonorum regularium ſimilium perimetri ſunt ut illorum radii, ſive perpendiculares ad latera. Figura IV. V.

Cùm etenim triangula HIC, QVM ſimilia ſint, erit (c) radius IC ad radium VM, ſive perpendicularis IH ad perpendicularem VQ ut recta HC ad QM, ſive ut integrum latus BC, ad LM; ſive, ob æqualem numerum laterum, ut integer perimeter ABCDEF ad integrum perimetrum KLMNOP. c 1. *hujus.*

XIV.

Circulorum peripheriæ ſunt inter ſe ut radii circulorum. *Pappi* 11. V.

Etenim peripheriæ ſunt circulorum, hoc eſt poligonorum ſimilium, perimetri.

XV.

Quin etiam *arcus ſimiles circulorum*, cùm inter ſe ſint ut integræ peripheriæ, *erunt ut* eædem integræ peripheriæ, ſive ut *radii circulorum*.

XVI.

Figura IV.VI. *Poligonum regulare quorumcunque laterum eſt æquale triangulo rectangulo* STZ, *cujus unum latus* SZ *ſit æquale perimetro* ABCDEF, *alterum verò* ST *æquale ſit perpendiculari* IH.

In poligono tot ſunt æqualia, & ſimilia triangula quot ſunt ejusdem poligoni latera, ſive tam multiplex eſt totum poligonum trianguli a 3. VI. BIC quàm multiplex eſt (a) integer perimeter ABCDEF, vel æqualis ipſi recta SZ, rectæ, vel lateris CB; ſed etiam triangulum ipſum STZ tam multiplex eſt trianguli æquè alti BIC, quàm multiplex eſt baſis SZ baſis, vel b *Ax.* 8. lateris BC, ergo (b) poligonum ABCDEF erit æquale triangulo STZ.

XVII.

c 12. *IV.* *Erit* ergo (c) *poligonum dimidium rectanguli* SX, *quod fiat a lateribus* SZ, ST, *hoc eſt a perimetro in perpendicularem*.

Archim prop. I. de dim. cir.

XVIII.

Circulus etiam *æqualis eſt triangulo rectangulo, quod radio, & peripheriâ veluti*

luti lateribus contineatur, ſive dimidium eſt rectanguli ex radio in peripheriam. Figura III.

Præterquam quod enim circulus ipſe eſt poligonum regulare, adeoque in iſto verificantur omnia, quæ de poligonis ipſis oſtenſa ſunt (a); Intelligatur tangens A C peripheriæ æqualis, junctâque D C, per quodlibet punctum E tranſeat peripheria E F, ipſique tangens ducatur E G alteri tangenti A C parallela. Erit ergo (b) tangens A C ad tangentem E G ut radius A D ad D E, ſive (c) peripheria A B ad peripheriam E F, permutandoque tangens A C ad peripheriam A B, ut tangens E G ad peripheriam E F; unde quemadmodum ex hypotheſi peripheria A B æqualis eſt tangenti A C, ita peripheria E F æqualis erit tangenti E G, atque ita ſemper; ergo peripheriæ omnes concentricæ, ſive circulus, æqualis eſt (d) tangentibus omnibus, ſive triangulo A D C, quod ex ipſis tangentibus componitur.

a 16. huius. b 2. huius. c 14. hujus. d 9. I.

XIX.

Quilibet ſector A D B *æqualis eſt triangulo ex radio* A D, *& latere* A O, *quod ſit æquale arcui ſectoris* A N B.

Semper enim erit (e) arcus A N B ad ſimilem arcum E I F, ut A D ad D E, ſive A O ad E M, unde quemadmodum ex hypotheſi arcus A B æqualis eſt rectæ A O, etiam arcus E I F erit æqualis rectæ E M, adeoque ſector A N B D æqualis triangulo A D O.

e 15. huius.

Sive ſector A N B D ad integrum circulum eſt ut arcus A N B ad integram peripheriam, vel

vel ex hypotheſi ut A O ad A C, nempe ut triangulum A D O ad triangulum A D C, ergo a *Antec.* ſicuti triangulum A D C eſt (a) æquale circulo, etiam triangulum A D O erit æquale ſectori.

XX.

Hinc *ſi duo ſectores ejusdem circuli inter ſe comparentur, erunt ut æquè altorum triangulorum baſes, hoc eſt ut arcus ipſi ſectorum.*

XXI.

Circulus eſt major omnibus figuris, ſive poligonis ſibi iſoperimetris.

Poligonum, quod circulo circumſcribatur, ſive in quo perpendicularis ad latera æqualis eſt circuli radio, circulo iſoperimetrum eſſe non poteſt, ſed ejus perimeter, ſive latera majora ſunt perimetro, vel peripheriâ circuli, ergo perpendicularis ad latera poligoni, quod iſoperimetrum ſit circulo, minor erit radio ejusdem b 18. *hujus.* circuli; ſed circulus dimidium eſt (b) rectanguli ex peripheriâ in radium; poligonum verò dimi- c 17. *hujus.* dium eſt (c) rectanguli ex ſuo perimetro, ſive in hypotheſi, ex eâdem peripheriâ circuli in perpendicularem ad latus poligoni, ergo circulus d 3. *VI.* erit (d) ad poligonum ut radius ad perpendicularem; ideoque, ſicuti radius major eſt ipſâ perpendiculari, circulus quoque major erit poligono.

XXII.

Si unius circuli radius duplus ſit radii alterius circuli, circulus ille hujus circuli quadruplus erit.

Cùm

Cùm enim circuli ſint (a) ut quadrata radiorum, quemadmodum quadratum ex integro radio quadruplum eſt (b) quadrati ex dimidio ejuſdem radii, ita etiam circulus circuli quadruplus erit. a 11. huius. b 16. VI.

XXIII.

Circulus AGB *ad circularem zonam, ſive armillam ſibi circumſcriptam erit ut quadratum ex radio* DH *ad rectangulum ex diametri partibus* MH, HI. Fig. 4. Tabula III.

Circulus FCE ad circulum AGB eſt (c) ut quadratum ex DI ad quadratum ex DH, ideoque per converſionem rationis circulus FCE erit ad zonam ut quadratum ex DI ad rectangulum (d) ex MH in HI; ſed circulus AGB ad circulum FCE erat ut quadratum ex DH ad quadratum ex DI, ergo ex æquo circulus ABG erit ad zonam ſibi circumſcriptam ut quadratum ex radio DH ad rectangulum ex MH in HI. c 11. huius. d Ex 17. VI.

XXIV.

Circulus quilibet ADBF *ad quamlibet zonam* MCIA *eſt ut quadratum ex radio* EB *ad rectangulum* MHI. Fig. III. & IV.

Circulus ADBF ad circulum AGB eſt (e) ut quadratum ex EB ad quadratum ex DH, & circulus AGB ad zonam ſibi circumſcriptam eſt (f) ut idem quadratum DH ad rectangulum MHI, ergo ex æquo circulus ADBF ad zonam erit ut quadratum ex radio EB ad rectangulum MHI. e 11. huius. f Ant.

XXIV. *Cir-*

XXV.

a Ex 30. hu-ius. *Circulus itaque ex rectâ X, quæ media proportionalis inveniatur* (a) *inter partes* MH, HI, *ſive cujus quadratum*
b 19. VI. *ſit* (b) *æquale rectangulo* MHI, *erit æqualis datæ zonae.*

XXVI.

Euclid. 35. III. Figura VII. *Si rectæ lineæ* AB, CD *ſe quomodocumque ſecuerint intra circulum in puncto* I, *rectangulum ex* AI *in* IB *erit æquale rectangulo ex* CI *in* ID.

Jungantur AC, BD. Quoniam itaque anguli
c 8. III. AIC, BID ad verticem oppoſiti ſunt (c) æquales, & anguli ACD, ABD eidem arcui AD
d 15. V. inſiſtentes æquales ſunt (d), & æquales etiam ſunt anguli CAB, CDB, erunt triangula ACI,
e 1. VII. DBI æquiangula, & ſimilia, eritque (e) AI ad
f 18. VI. IC, ut DI ad IB, adeoque (f) rectangulum ex extremis AI, IB æquale rectangulo ex intermediis CI, ID.

XXVII.

Euclid. 36. III. Figura VIII. *Si ex puncto quolibet* A, *quod extra circulum aſſumatur, ducatur tangens* AB, *& diameter* AC, *vel alia quæcunque recta* AD, *rectangulum ex* CA *in* AE, *vel ex* DA *in* AF, *erit aequale quadrato ex tangente* AB.

Jungatur BF, BE, BD, BC.

Cùm itaque recta AB circulum tangat in B,
g 17. V. atque inde ducatur ſecans BE, erit (g) angulus

ABE

A B E æqualis angulo B C E, adeoque triangula C A B, B A E, quæ præter angulum C A B communem æquales habent angulos ABE, B C E, æquiangula, & ſimilia erunt, unde erit (a) C A ad A B, ut eadem A B ad A E, adeoque (b) rectangulum ex extremis C A, A E erit æquale quadrato ex intermediâ A B. Quod cùm eodem modo oſtendi poſſit de rectangulo D A F, erunt rectangula C A E, D A F ſemper æqualia eidem quadrato tangentis, & inter ſe; ſicuti duæ tangentes A B, A G eâdem ratione inter ſe æquales oſtendi poterunt.

a 1. *VII.*
b 10. *VI.*

XXVIII.

Si ex trianguli rectanguli vertice B *demittatur ad baſim perpendicularis* B D, *erunt triangula* A D B, C D B *toti triangulo* A B C, *atque inter ſe ſimilia.*

Euclid. 8. VI. Figura IX.

Triangula A B C, A D B rectos, & æquales habent angulos A B C, A D B, & inſuper angulum B A D communem, ergo cùm reliquum etiam angulum B C A angulo reliquo A B D æqualem habere debeant (c), æqualia, & ſimilia ſunt inter ſe: rurſus ob rectos, & æquales angulos C B A, C D B, & angulum B C A communem, reliquus etiam angulus C B D erit æqualis reliquo angulo B A D; adeoque etiam triangulum C D B ſimile erit triangulo C B A; unde (d) triangula quoque A D B, C D B æquiangula, adeoque ſimilia erunt inter ſe.

c 17. IV.
d *Ex* 1. *huius.*

XXIX.

Iiſdem poſitis latera A B, B C, *quae rectum angulum continent, media propor-*

tio-

tionalia ſunt inter baſim integram, illudque ſegmentum baſis, quod ab eodem latere, & perpendiculari intercipitur.

Cùm enim triangula A B C, A D B ſimilia ſint, erit C A ad A B, ut eadem A B ad A D (a); ſicuti quia triangula A B C, B D C ſimilia ſunt, erit A C ad C B, ut eadem C B ad C D.

a *Ex* 1. *hujus*.

XXX.

Perpendicularis autem B D *media proportionalis erit inter ſegmenta baſis.*

Cùm etenim in triangulis ſimilibus A D B, C D B circa rectos, & æquales angulos latera proportionalia eſſe debeant (b), erit A D ad D B, ut eadem D B ad D C.

b 1. *hujus*

XXXI.

Euclid. 13. VI. Ut itaque *recta linea inter duas propoſitas lineas* A D, D C *media proportionalis inveniatur*

Illæ in rectam lineam diſponi debent, quâ veluti diametro ſemicirculus deſcribatur, tum elevari perpendicularis D B ſecans peripheriam in B. Junctis enim AB, BC, erit (c) angulus ABC, qui ſemicirculo inſeribitur, rectus; adeoque perpendicularis D B media proportionalis erit (d) inter baſis ſegmenta, ſive propoſitas lineas AD, DC.

c 16. V.
d *Ant*.

XXXII.

Euclid. 31. VI. Figura X. *Si ſuper tria trianguli rectanguli* A B C *latera tres figuræ ſimiles* A G B, B E C, A F C *deſcribantur, erit figura ſuper baſi*

ſi A C *deſcripta ſemper aequalis utrique figurae, quae ſuper aliis lateribus deſcribatur.*

Demittatur enim B D perpendicularis ad baſim, eritque (a) ob tres A C, C B, C D continuè proportionales (b), ut A C ad C D, ita figura A F C ad figuram ſimilem C E B; atque ſimiliter, ob tres alias C A, A B, A D continuè proportionales, erit ut A C ad A D, ita figura A F C ad figuram A G B, ergo conjungendo ut recta A C ad utramque ſimul A D, D C, ita figura A F C ad utramque ſimul figuram A G B, B E C, hoc eſt in ratione æqualitatis.

a 8. *hujus.*
b 29. *huius.*

XXXIII.

Quadratum itaque *quod ſit a latere* A C *rectum angulum ſubtendente, ſemper eſt aequale duobus quadratis, quae fiunt a lateribus* A B, B C *rectum angulum continentibus.* *Euclid.* 47. *I.*

XXXIV.

Unde *ſi in quadrato* D A B E *ducatur diameter* D B, *erit quadratum ex diametro* D B *duplum quadrati ex latere* A B. Figura XV. Tabula III.

Cùm etenim quadratum ex D B ſit æquale quadratis ex D A, A B, & ejuſmodi quadrata ex æqualibus lateribus D A, A B ſint æqualia, erit quadratum ex D B duplum quadrati ex ſolo latere A B.

Hinc

XXXV.

Euclid. 117. X. Hinc recta, vel quadrati *diameter* BD *erit incommenſurabilis* rectæ AB, ſive *lateri ejusdem quadrati*.

Neque enim inveniri poterunt numeri, qui exprimant rationem diametri AC ad latus AB, ſive quorum quadrata ſint inter ſe, ut 16 ad 8, cùm numerus 8 a nullo numero in ſe ipſum ducto, ſive multiplicato reſultet, hoc eſt quadratus eſſe non poſſit.

XXXVI.

Euclid. 3. II. Figura IX. Tab. 4. *Si recta linea* AC *utcunque dividatur in* D, *rectangulum ex* AC *in* CD *erit æquale quadrato ex* CD, *& rectangulo partium* AD, DC.

Deſcripto ſuper AC ſemicirculo, erectâque perpendiculari DB, jungatur AB, CB.

a 10. VI. b 32. huius. c 31. huius. Rectangulum itaque ex AC in CD, ſive (a) quadratum ex CB, eſt æquale quadrato ex CD unà cum quadrato ex BD (b), ſive (c) rectangulo ADC.

XXXVII.

Euclid. 4. II. *Quadratum ex totâ* AC *erit æquale quadratis partium* AD, DC *unà cum rectangulo* ADC *bis ſumpto*.

d 32. huius. e 31. huius. Quadratum ex AC eſt (d) æquale quadratis AB, BC, ſive quadratis AD, DC unâ cum quadrato DB, hoc eſt (e) rectangulo ADC bis ſumpto.

XXXVIII.

Euclid. 2. II. *Quadratum ex* AC *erit æquale rectangulis ex totâ in ſingulas partes*.

Nam

Nam quadratum ex A C eſt (a) æquale quadrato ex A B, ſive (b) rectangulo ex C A in A D, unà cum quadrato ex C B, ſive rectangulo ex A C in C D. a 33. huius. b 29. huius.

XXXIX.

Quadratum verò ex utrâque A C, C D *erit æquale quadrato ex aliâ* A D *unâ cum rectangulo ex* A C *in* C D *bis ſumpto.* Euclid. 7. II.

Quadratum ex A C (c) eſt æquale quadratis A D, D C unà cum rectangulo A D C bis ſumpto, ergo quadrata A C, C D erunt æqualia quadrato A D unâ cum quadrato D C bis ſumpto atque rectangulo A D C ſimiliter bis ſumpto, hoc eſt (d) cum rectangulo A C, C D bis ſumpto. c 37. huius. d 36. hujus.

XL.

Si recta A C *bifariam dividatur in* E, *& inæqualiter in* D, *rectangulum ex partibus* A D, D C *unà cum quadrato ex intermediâ* E D *erit æquale quadrato ex dimidiâ* E C. Euclid. 5. II.

Quadratum enim ex E C, ſive E B ſemper eſt (e) æquale quadrato ex E D, unà cum quadrato ex D B, ſive (f) rectangulo A D C. e 33. huius. f 30. hujus.

XLI.

Si recta linea C E *bifariam dividatur in* I, *adjungaturque ipſi ſegmentum quodlibet* E A, *rectangulum ex* C A *in* A E *unâ cum quadrato ex intermediâ* I E *erit æquale quadrato ex* I A. Euclid. 6. II. Figura VIII.

K De-

Deſcribatur ſuper EC circulus EBC, cui tangens ducatur ex puncto A recta AB, eritque
a 17. huius. (a) rectangulum ex CA in AE æquale quadrato ex AB; additiſque hinc inde quadratis æqualibus ex IE, IB, erit rectangulum CAE unà cum quadrato IE æquale quadratis AB,
b Ex 12. V. & 32. huius. BI ſive (b) quadrato ex IA.

Sex ſuperiores Propoſitiones, etſi jam Libro VI. num. 14. propoſitæ, ac demonſtraræ jam fuerint; eas tamen hìc etiam addidiſſe juverit, cùm longè clariùs, & breviùs ex XXXII. propoſitione deducantur; quemadmodum etiam ex ipsâ, & ſequentibus facilè oſtenditur Propoſitio

XLII.

Eucl. 11. II. Figura XVII. Tab. 3. *Propoſitam lineam rectam AB ita ſecare, ut rectangulum ex totâ in minorem partem ſit æquale quadrato majoris partis.*

c 1. III. Bifariam dividatur (c) quadrati, quod ſuper AB deſcribatur, latus AD in E, jungaturque EB;
d 4. III. cui ponatur (d) æqualis recta EF, deſcriptoque
e 11. IV. ſuper AF quadrato AG (e) extendatur GH.

f Antec. Erit ergo (f) rectangulum DG unà cum quadrato ex EA ſemper æquale quadrato ex EF, ſive EB, nempe (g) quadratis ex AB, & EA,
g 32. huius. demptoque communi quadrato ex EA, rectangulum DG erit æquale quadrato ex AB, nempe quadrato DB, demptoque communi rectangulo DI, erit reliquum quadratum AG, quod a majori parte AI deſcribitur, æquale rectangulo CI, quod ab integrâ lineâ CB, vel AB, ejuſque minori parte BI continetur.

Hinc

XLIII.

Hinc autem facilè apparet lineam AB ita diviſam eſſe in puncto I, ut tres AB, AI, IB ſint in continuâ proportione. Porrò cum linea in hac ratione dividitur *in extremâ, & mediâ ratione* ſecari dicitur. Eucl. 30. VI.

XLIV.

Quadratum, quod ſit a latere AB *obtuſum angulum ſubtendente demiſſâ perpendiculari* BD, *erit æquale quadratis ex lateribus* AC, CB *unâ cum rectangulo ex partibus* AC *in* CD *bis ſumpto.* Euclid. 12. II. Figura XI.

Quadratum enim ex AB eſt (a) æquale quadrato ex BD unà cum quadrato AD, hoc eſt (b) unà cum quadratis ex AC, CD, ſimulque rectangulo ACD bis ſumpto; ergo ſi pro quadratis CD, DB ſumatur ipſis æquale (c) quadratum ex BC, erit quadratum ex AB æquale quadratis AC, CB unà cum rectangulo ACD bis ſumpto. a 33. huius. b 37. huius. c 33. huius.

XLV.

Quadratum verò *ex latere* AB *acutum angulum ſubtendente, unà cum rectangulo ex* AC *in* CD *bis ſumpto erit æquale quadratis laterum* AC, CB. Euclid. 13. II. Figura XII.

Quadratum ex AC eſt (d) æquale quadratis ex AD, DC unà cum rectangulo ADC bis ſumpto, quadratum verò ex CB eſt (e) æquale quadratis ex CD, DB; ergo duo ſimul quadrata ex AC, CB ſunt æqualia quadratis ex AD, & DB unà cum duobus quadratis ex DC, atque inſuper rectangulo ADC bis ſumpto; ſed d 37. huius. e 33. huius.

quadrata ex A D, D B, ſunt æqualia quadrato ex A B, & duo rectangula A D C unà cum duobus quadratis ex D C ſunt æqualia duobus rectangulis ex A C, in C D, ergo quadrata ex A C, C B erunt æqualia quadrato ex A B unà cum rectangulo ex A C, in C D.

XLVI.

Euclid. 48. I. Fig. X. *Si quadratum, quod ſit a latere* A C *ſit æquale quadratis, quæ ſiunt a lateribus* A B, B C, *angulus* A B C *rectus erit.*

Si etenim angulus A B C eſſet obtuſus, quadratum ex A C eſſet (a) majus quadratis ex A B, B C; ſin verò angulus A B C acutus eſſet, quadratum ex A C eſſet (b) minus quadratis ex A B, B C, quorum utrumque repugnat hypotheſi.

a 44. *huius.* b 45. *huius.*

Quod verò de quadratis in tribus hiſce Propoſitionibus oſtenſum eſt, de quibuslibet etiam figuris ſimilibus verificatur.

LIBER VIII.

De Solidorum Superficiebus, atque Sectionibus.

LInearum, Figurarumque cognitionem, quæ duo priora Quantitatis continuæ genera complectitur, ſequitur Corporum, ſive Solidorum contemplatio, quæ tertiam, & ultimam illius Quantitatis ſpeciem conſtituit. Octavus itaque hic liber corpora, illorumque proprietates omnes, & accidentia conſiderabit; atque ut clariori, conſuetâque methodo, & ordine a ſimplicioribus ad compoſitiora ſenſim progrediamur, primò quidem eorundem corporum ſuperficies, quibus extrinſecùs ambiuntur, variaſque Sectiones, quæ in ipſis corporum ſuperficiebus fieri, ſive deſcribi concipiuntur, comparabo; deinde verò corporum molem, ſive ſoliditatem metiar. Quamvis autem exiguâ certè, breviſſimâque Propoſitionum ſerie non modò omnia ferè, quæ Euclides in prolixioribus LIX. propoſitionibus lib. XI., ac XII. expoſuit, ſed pulcherrima quoque, ac divina prorſus inventa, quæ duobus libris de Sphærâ, & Cylindro Archimedes tradidit, com-

plexus ſim, non erit tamen fortaſſe, quid in tantâ brevitate nitorem, perſpicuitatemque deſideres: id enim maximè, diligenterque curavi, ut quemadmodum hæc Geometriæ pars, quæ Stereometria, ſive *Solidorum dimenſio* inſcribi jam ſolet, reliquas omnes pulchritudine, utilitate, ac ubertate antecellit, ita quoque longè breviori, clariori, commodiorique methodo, quàm ceteri conſueverint, ex uberrimo præſertim Indiviſibilium fonte deduceretur.

DEFINITIONES.

I.

Solida, ſive corpora dicuntur illa, quæ trinam extenſionem habent, longitudinem nempe, latitudinem, & altitudinem, ſive profunditatem. Ut ſolidi, ſive corporis AG longitudo eſt recta AD, latitudo AB, altitudo verò, ſive profunditas AE. Figura XIV. Tab. 5.

II.

Hinc corpora, ſive ſolida pluribus ſuperficiebus planis, aut unicâ ſuperficie curvâ continentur.

III.

Pyramis eſt ſolidum, quod pluribus, ac ſaltèm tribus, triangulis AEB, BEC, CED, DEA ſuper alicujus poligoni latera erectis, atque in punctum unum E coëuntibus continetur. Figura III. & IV.

IV.

Punctum illud E Pyramidis *apex*, aut *vertex* dicitur; poligonum verò ABCD *baſis*; atque trian-

triangula AEB, BEC, CED, DEA Pyramidis *latera* vocantur.

V.

Priſma eſt ſolidum, cujus oppoſita plana, ſeu latera ABC, DEF parallela ſunt, & æqualia; cetera verò latera AF, FB, BD ipſum ambientia ſunt parallelogramma. Figura II. & XVII.

VI.

Parallelepipedum verò eſt priſma, cujus omnia plana, etiam oppoſita parallelogramma ſunt. Figura XII.

VII.

Cubus eſt parallelepipedum, cujus omnia plana quadrata ſunt, & æqualia; ideſt quod a ſex quadratis æqualibus continetur; ſive eſt parallelepipedum, cujus omnes anguli recti ſunt, & omnia latera, vel dimenſiones æquales ſunt. Figura XIV.

VIII.

Conus eſt ſolidum, quod a circulo tanquam baſi, & a curvâ conicâ ſuperficie continetur. Conica verò ſuperficies deſcribi concipitur a rectâ AE, quæ circa punctum immobile E tanquam verticem converſa baſis peripheriam ABCD radit, donec ad idem punctum, ex quo diſceſſerat, revertatur. Figura VIII.

IX.

Punctum E coni *vertex*, aut *apex* dicitur, recta EX jungens apicem ipſum, & centrum baſis, dicitur *axis*; & recta AE jungens apicem, & peripheriæ punctum A, coni *latus* vocatur.

X.

Si axis ſuper circulum baſis obliquè cadat, *obliquus* eſt conus, ſin verò perpendiculariter in ipſum incidat, conus eſt *rectus*, cujuſmodi generatur a triangulo rectangulo AXE, Figura VIII.

circa latus X E, tanquam axim immobilem; revoluto.

XI.

Figura VI. & VII. Cylindrus eſt ſolidum, quod duobus circulis A B C D, G H I K parallelis, & æqualibus, & a curvâ cylindricâ ſuperficie continetur. Cylindrica verò ſuperficies generari concipitur a lineâ G A, quæ æquabili motu utramque peripheriam circulorum radit.

XII.

Circuli paralleli, & oppoſiti dicuntur Cylindri *baſes*; recta verò X Y jungens utriuſque circuli centra dicitur *axis*; & recta A G, quæ dum movetur jungit duæ peripheriæ puncta A, G, cylindri *latus*.

XIII.

Si axis fuerit utrique circulo obliquus, cylindrus erit *obliquus*, ſin verò perpendiculariter in ipſos incidat, erit *rectus*; qualis generatur a rectangulo A Y circa latus X Y tamquam axim immobilem revoluto: ſicuti cylindrica ſuperficies tunc generatur a latere A G circâ axim revoluto.

XIV.

Figura XV. Sphæra eſt ſolidum unicâ ſuperficie curvâ contentum, cujus omnia ſuperficiei puncta æqualiter a puncto medio, vel a centro I diſtant. Generari verò concipitur ſphæra a circulo A B C D circâ diametrum A C tanquam axim immobilem revoluto.

XV.

Priſmata, Pyramides, Cylindri, Conique *ſimiles* dicuntur illi, quorum baſes ſunt inter ſe ut quadrata altitudinum, ſive in quibus longitudi-

tudines, latitudines, & altitudines ſunt in eâdem ratione.

XVI.

Plana, ſive ſuperficies inter ſe *parallela* dicuntur illæ, quæ licèt ex quacumque parte in infinitum extendantur, nunquam inter ſe convenient.

XVII.

Recta linea AB dicitur eſſe perpendicularis ad planum CE, dum rectos, & æquales angulos efficit cum ſingulis lineis AF, AG, AE, quæ in eodem plano poſitæ illam contingunt in A. Figura XIII. Tab. 4.

XVIII.

Corporum, ſive Solidorum Sectiones ſunt illæ figuræ, quæ deſcribuntur in ſolidi, ſive corporis ſuperficie cum Solidum ipſum, aut illius ſuperficies a tranſverſo plano ſecatur, ut figura GHI, GHIK. Fig. II. & III.

PROPOSITIONES.

I.

Eiuſdem trianguli, ſive quadrilateri AGBF ſuperficies, & latera non partim in ſubjecto, partim in plano elevato, ſed omnia in uno, eodemque plano reperiuntur. Eucl. 1. & 2. XI. Fig. XIV. Tab. 4.

Si etenim illorum pars AGF in plano ſubjecto foret, reliqua GBF in elevato, etiam rectæ lineæ AB pars una AE in uno, pars al-

altera E B in alio plano reperiretur, quod lineæ rectæ repugnat.

II.

Per quaslibet lineas rectas AB, CD *concurrentes in* E *planum aliquod extendi poteſt.*

Aſſumantur ubicumque puncta F, G, jungaturque A G, G B; A F, F B.

a *Ant.* Erunt (a) itaque ſingula trianguli AEG latera A E, G E in uno, eodemque plano; ſed in eodem plano laterum AE, GE ſunt etiam (b) integræ lineæ A B, C D concurrentes in E, ergo rectæ A B, C D ſunt in eodem plano, hoc eſt per rectas A B, C D planum extendi poterit.

b *Ex ant.*

III.

Eucl. 3. *XI.* *Communis duorum planorum* A B, C D *ſectio* E F *eſt linea recta.*

Figura XV. Tab.4. Niſi etenim foret, duci poſſet (c) in plano AB recta linea EGF, & in alio plano CD recta linea EIF, quæ rectæ lineæ ſpatium aliquod continerent, quod eſt impoſſibile (d).

c *Poſt.* 1. *III.*

d *Def.* 5. *III.*

IV.

Euclid. 4. *XI.* *Si recta* AB *perpendicularis fuerit ad rectas* CD, EF, *quæ ſe mutuò ſecent in* A, *erit hæc perpendicularis ad planum, in quo ejuſmodi rectæ reperiuntur.*

Figura XVI.

Aſſumptâ qualibet parte A I, junctâque B I, intelligatur triangulum rectangulum B A I circa latus immobile AB converti; latus A I, quod cum lineâ A B rectum angulum continet, ſuperficiem deſcribet, in quâ rectæ CD, E F angu-

gulos æquales, & rectos cum eâdem AB continentes reperiuntur, adeoque dum latus AI ad aliquod punctum V pervenerit, recta BA perpendicularis erit ad ſubjectam lineam AV, atque ita ſemper, ergo recta AB perpendicularis erit ad omnes lineas ſubjectas, quas tangit in A, ſive perpendicularis ad planum ſubjectum.

V.

Si plana parallela ABC, DEF *a quotcumque tranſverſis planis* ADFC, ADEB *ſecentur, erunt communes illorum ſectiones* AC, DF; AB, DE, *inter ſe parallelæ.* *Euclid.* 16. *XI.* Fig. I. & II. Tab. 5.

Si enim ſectiones illæ parallelæ non forent, productæ tandem inter ſe convenirent, quod fieri non poteſt, niſi etiam oppoſita plana, in quibus illæ ſectiones continentur, inter ſe conveniant, quod repugnat hypotheſi (a), quâ ſuperficies ejuſmodi, ſive plana parallela ſupponuntur. a *Def.* 16. *hu.*

VI.

Si plani DFE *ſectiones, aut latera* DF, DE *parallela fuerint alterius plani* ACB *ſectionibus, ſive lateribus* AC, AB, *plana ipſa ſectionum parallela erunt.* *Euclid.* 15. *XI.*

Nam ſi plana parallela non eſſent, versùs aliquam partem producta tandem concurrerent, ideoque etiam latus aliquod, ſive ſectio ſuperioris plani cum latere, vel ſectione ſubjecti plani, quæ ſimul cum aliâ ſectione in eodem plano ſecante reperitur, concurreret, quod eſt impoſſibile, cùm ſectiones ejuſmodi parallelæ ſupponantur.

Hinc

VII.

Hinc autem facilè apparet, quod *Si recta* BE *perpendicularis fuerit ad utramque rectam* DE, FE *ſe mutuò ſecantes in* E, & conſequenter (a) perpendicularis ad planum DFE, *perpendicularis etiam erit* (b) *ad utramque* CB, AB, & conſequenter etiam ad planum ACB, unde *plana, ad quæ eadem recta linea perpendicularis fuerit, erunt inter ſe parallela, vel è contra.*

a *Ex 4. huius.*
b *7. IV.* Euclid. 14. XI.

VIII.

Si rectæ CF, AD *ſint inter ſe parallelæ, atque per illas extendantur plana* CE, AE, *quæ ſe mutuò ſecent in* BE, *erit communis illorum ſectio* BE *utrique rectae* CF, AD *parallela.*

Fig. I.

Niſi etenim recta CF parallela foret rectæ, ſive ſectioni BE, concurrere cum illâ poſſet in I, adeoque linea CF concurrere poſſet in aliquod punctum I ſubjecti plani, in quo quadrilaterum AGHB reperitur, unde quadrilateri AGIC duo latera AG, GI in ſubjecto plano, reliqua verò AC, IC in plano elevato reperirentur, quod eſt (c) impoſſibile. Similiter ſi rectæ AD, BE, parallelæ non forent, poſſent ejuſmodi rectæ in aliquo puncto convenire, adeoque parallelogrammorum CD, CE latera AD, BE, & conſequenter etiam illorum diametri CD, CE in aliquo puncto concurrerent, hoc eſt duæ rectæ lineæ di-

c 1. *huius.*

diverſæ, ac in diverſis planis poſitæ inter eadem puncta ducerentur, & ſpatium continerent, quod eſt impoſſibile (a), communis itaque ſectio planorum, quæ per parallelas lineas extenduntur, erit rectis ipſis parallela. a *Def.* 5. III.

IX.

Si rectæ CF, BE *fuerint parallelæ eidem rectæ* AD *inter ſe quoque parallelae erunt.* *Euclid.* 9. XI. Fig. I.

Quod rectæ CF, BE concurrere, vel convenire non poſſint, jam oſtenſum eſt (b); quod verò in eodem plano reperiantur, facilè oſtendi poteſt. Niſi enim ſint, per rectas CF, CB extendatur (c) planum CK efficiens cum plano AE extenſo ſectionem BK. Erit itaque (d) ſectio BK lateri AD parallela, cui ſimiliter ex hypotheſi eſt parallela recta BE; æquales itaque forent anguli ABK, ABE eidem alterno VAB, & inter ſe, quod eſt impoſſibile, ergo recta BE parallela erit rectæ CF. b *In ant.* c 2. *huius.* d *Ant.*

X.

Si quodcumque ſolidum ACE *tranſverſis planis* ACB, DFE *inter ſe parallelis ſecetur, illorum ſectiones* ACB, DFE *æquales angulos continebunt, adeoque ſimiles erunt.* Fig. II.

Si ſectionum latera AC, DF; AB, DE, quemadmodum ſunt ex hypotheſi parallelæ, ita etiam æqualia fuerint, ut in priſmate contingit, tunc etiam rectæ CF, BE, cùm ſint (e) eidem lateri AD, & inter ſe æquales, ac e 10. IV.

pa-

parallelæ, æquales etiam, ac parallelas conti-
a 9. IV. nebunt (a) rectas CB, FE, unde triangulum
b 12. ABC erit (b) ſimile, & æquale triangulo DEF;
III. & atque ita ſemper, ergo tota ſectio ACB ſi-
1. VII. milis, & æqualis erit ſectioni DFE.

Si verò latera inæqualia fuerint, ut in
Figura Pyramide, ex majoribus LM, LN abſcindan-
IV. tur partes LS, LT æquales aliis PQ, PR,
jungaturque QS, RT. Cùm itaque QP, SL
c Ex parallelæ ſint (c), & æquales (d) etiam rectæ QS,
hyp. PL parallelæ, & æquales erunt (e); ſimiliter
d Ex oſtendetur rectam RT æqualem, & parallelam
conſtr. eſſe eidem rectæ PL, adeoque rectæ SQ,
e 9. IV. TR etiam inter ſe æquales erunt (f), & paralle-
f 9. hu. læ, unde etiam latus ST erit (g) æquale, & pa-
g 9. IV. rallelum lateri QR, adeoque ſingula triangu-
li PQR latera ſingulis trianguli LST late-
ribus æqualia erunt, unde triangulum ipſum
h 12. PQR ſimile, & æquale erit (h) triangulo LST;
III. ſed triangulum quoque LMN ſimile eſt (i) trian-
i 2. gulo LST, cùm recta ST, communis nempe
VII. ſectio planorum MNL, QRTS, quæ per
k 8. hu parallelas MN, QR extenduntur, ſit (k) rectæ
MN parallela, ergo triangulum, ſive ſectio
PQR ſimilis erit triangulo, ſive ſectioni LMN.

XI.

Fig. II. & IV. *Sectiones* itaque *parallelæ* ACB, DFE, *ſive* LMN, PQR, *cùm ſimiles ſint, erunt*
l 9. VII. *inter ſe* (l) *ut quadrata laterum homologorum* AC, DF, *ſive* LM, PQ.

XII.

Hinc cùm in priſmate homologa utriuſque ſectionis latera AC, DF ſem-

per

per æqualia ſint, etiam illorum quadrata ſemper æqualia erunt, adeoque (a) etiam *ſectiones ipſae ſemper aequales erunt.* a 7. VII.

XIII.

In Pyramide verò, cujus altitudo, vel perpendicularis ſit OV, quæ a planis ſectionum LMN, PQR ſecetur in V, Y erit *ſectio, vel baſis* LMN *ad parallelam ſibi ſectionem* PQR *ut quadratum ex* VO *ad quadratum ex* YO. Figura IV.

Eſt enim (b) baſis ad ſectionem ſimilem, ſibique parallelam ut quadratum ex LN ad quadratum ex PR, ſive ut quadratum ex NO ad quadratum ex OR, ſive (c) quadratum ex VN ad quadratum ex YR, ſive denique ut quadratum ex altitudine VO ad quadratum ex altitudine YO. b 11. *huius.* c 2. VII.

XIV.

Si cylindrus AI *tranſverſo plano* OQ *baſi parallelo ſecetur, ſectio* OPQR *circulus erit æqualis circulo baſis.* Figura VI.

Si enim per axim XY, & quodcumque peripheriæ punctum D ducatur planum DH efficiens cum tranſverſo plano OQ communem ſectionem RP diametro DB parallelam (d), ſemper æqualis erit (e) ſectio RZ radio DX, adeoque ſectio rotunda OPQR circulus erit ex radio OZ, vel AX deſcriptus, unde ſemper æqualis erit circulo baſis. d 5. *huius.* e 10. IV.

Se-

XV.

Figura VIII. *Sectio* G H I K, *quæ ſit in cono, dum a tranſverſo plano* G I *baſi parallelo ſecatur, circulus erit, qui ad circulum baſis erit ut quadratum ex altitudine, vel parte axis* EZ *ad quadratum ex axe coni* EX.

Ducantur enim per quælibet peripheriæ puncta A, D, & axim EX triangula AEC, DEB, quæ cum tranſverſo plano GHIK efficient communes ſectiones KH, GI bifariam ab axe diviſas in Z, ſicuti bifariam dividuntur in X baſes AC, DB. Cùm itaque in æquè altis triangulis AEX, DEX, tam AX ad GZ, quàm
a 2. VII. DX ad KZ ſit ut XE ad EZ (a), erit AX ad DX ut GZ ad KZ, unde ſicuti ſemper AX eſt æqualis ipſi DX, etiam GZ ſemper æqualis erit ipſi KZ, adeoque ſectio GHIK circulus erit, qui ad circulum baſis ABCD
b 11. VII. erit (b) ut quadratum ex radio GZ ad quadratum ex AX, ſive quadratum ex altitudine EZ ad quadratum ex altitudine EX.

XVI.

Fig. V. *Priſmatis recti* AK *ſuperficies demptis baſibus æqualis eſt rectangulo ex altitudine, vel latere* AG, *aut axi* XY *ejuſdem priſmatis in perimetrum baſis* ABCDEF.

Priſmatis AK ſuperficies ex totidem rectan-
c Def. 5. hui. gulis AH, HC, CK, KE, EM, MA componitur (c) quot ſunt baſis, ſive perimetri ABCDEF la-

latera, quorum rectangulorum ſingula ſingulis perimetri lateribus, & eâdem altitudine prismatis continentur, ergo omnia ſimul rectangula, ſive integra priſmatis ſuperficies, erit æqualis rectangulo ex ipsâ priſmatis altitudine AG in perimetrum baſis ABCDEF.

XVII.

Etiam *curva cylindrica ſuperficies demptis baſibus erit æqualis rectangulo ex altitudine, vel latere, vel axe cylindri* AG *in peripheriam baſis.* Figura VI.

Eſt enim cylindrus priſma, cujus baſis eſt circulus perimeter eſt circuli peripheria ex infinitis lateribus compoſita, adeoque rectangulum ex altitudine in ſingula perimetri latera, ſeu in peripheriam, erit æquale cylindricæ ſuperficiei.

XVIII.

Si cylindri, vel priſmatis AI *ſuperficies planis* ABCD, OPQR, GHIK *parallelis ſecetur, erunt cylindricæ, vel priſmaticæ ſuperficiei partes inter ſe, ut altitudines* AO, OG. Figura V. & VI.

Cùm etenim cylindri, vel priſmatis AI ſuperficies ſit æqualis (a) rectangulo ex altitudine AG in perimetrum ABCD; &. cylindri, vel priſmatis OI ſuperficies æqualis ſit rectangulo ex altitudine OG in perimetrum ipſum OPQR, ſive (b) ABCD, erunt cylindricæ ſuperficies inter ſe ut illa rectangula, nempe (c) ut altitudines AO, OG.

a 16. & 17. *huius.*
b 12. & 14. *huius.*
c 4. VI.

XIX.

Cylindri, vel priſmatis recti, quod baſim poligonam regularem habuerit, ſuperficies, demptis baſibus, erit ad baſim, ut altitudo, vel latus AG *ad* XT *dimidium radii, vel cateti baſis* ABCD.

Cylindri, vel priſmatis ſuperficies eſt æqualis (a) rectangulo ex altitudine, vel latere AG in peripheriam, ſive perimetrum ABCD, baſis autem ABCD æqualis eſt (b) rectangulo ex XT dimidio radii, ſive cateti XV in perimetrum, vel peripheriam ipſam, ergo cylindri, vel priſmatis ſuperficies erit ad baſim, ut rectangula ipſa, hoc eſt (c), ut latus AG ad XT.

a 18. & 17. huius. b 16. & 17. VII. c 4. VI.

XX.

Arch. 13. I. de Sph. & cyl.

Si fiat ut altitudo, vel latus LS *ad* LE *quadrantem diametri baſis* LM, *ſive dimidium radii* LN, *ita quadratum ex* LF *ad quadratum ex radio* LN, *erit cylindrica ſuperficies æqualis circulo ex radio* LF.

Figura VII.

Cylindrica ſuperficies ad circulum baſis eſt ut SL ad LE (d), ſive ex hypotheſi, ut quadratum ex LF ad quadratum ex LN, ſive (e) ut circulus ex radio LF ad eundem circulum ex radio LN, ergo (f) cylindrica ſuperficies æqualis eſt circulo ex radio LF.

d Ant. e 11. VII. f Ax. 2, I.

XXI.

Iiſdem poſitis quadratum ex LF *eſt æquale rectangulo per axim* LT; & LF *media proportionalis inter* SL, LM.

Qua-

Quadratum ex LF eſt ex hypotheſi ad quadratum ex LN ut SL ad LE, ſive (a) ut rectangulum ex SL in LE ad quadratum ex LE; ſed rectangulum ex SL in LM quadruplum eſt rectanguli ex SL in LE (b), ſicuti quadratum ex LN quadruplum eſt quadrati ex LE (c), ergo quadratum ex LF erit ad quadratum ex LN, ut rectangulum LT ad idem quadratum ex LN, adeoque (d) quadratum ex LF erit æquale rectangulo LT.

a 4. VI. b 4. VI. c IV. d Ax. 2. I.

XXII.

Curvæ ſuperficies cylindrorum AI, LT *ſunt inter ſe, ut rectangula per axim.* Figura VI. & VII.

Ponantur, ut antea XT, LE quartæ partes diametrorum; tum fiat ut GA ad XT ita quadratum ex AS ad quadratum ex XV; atque ut SL ad LE ita quadratum ex LF ad quadratum ex LN; eritque (e) cylindrica ſuperficies AI æqualis circulo ex radio AS; atque cylindrica ſuperficies LT æqualis circulo ex radio LF; ergo cylindricæ ſuperficies erunt inter ſe ut circuli, ſive quadrata ex AS, LF, ſive ut rectangula per axim AI, LT, quæ quadratis ipſis æqualia ſunt (f).

e 20. *huius.* f *Ant.*

XXIII.

Cujuſcumque rectæ pyramidis ABCDE *ſuperficies, demptâ baſi, æqualis eſt rectangulo ex perimetro baſis* ABCD *in dimidium rectæ* EF, *quae ex pyramidis vertice* E *perpendiculariter ducitur ad aliquod perimetri latus* CD.

Arch. 7. & 8. l. *de de Sph.* Figura III.

a Def. 3. huj. Pyramidis rectæ ſuperficies componitur (a) ex tot triangulis æquè altis, quot ſunt in perimetro latera, quorum triangulorum ſingula b 7. VI. æqualia ſunt (b) rectangulo ex ſingulis baſis lateribus in dimidium altitudinis, ſive perpendicularis EF, ergo omnia ſimul triangula, ſive integra pyramidis ſuperficies, æqualis erit rectangulo ex omnibus baſis lateribus, ſive ex baſis perimetro in dimidium perpendicularis EF; ſive ſuperficies ipſa dimidia erit rectanguli ex integrâ altitudine FE in perimetrum ABCD.

XXIV.

Figura VIII. *Etiam curva coni* ABCDE *ſuperficies, demptâ baſi, aequalis erit rectangulo ex peripheriâ circuli baſis in dimidium lateris coni.*

Conus enim eſt pyramis infinitorum laterum, in quâ perpendicularis ad aliquod ex infinitis perimetri lateribus ex vertice eſt latus ejuſdem coni, ſive recta AE.

XXV.

Hinc *rectangulum ex integro latere* AE *in peripheriam* ABCD *duplum eſt conicae ſuperficiei demptâ baſi.*

XXVI.

Arch. 15. I. de Sph. *Coni ſuperficies ad circulum baſis, ſive rectae pyramidis ad baſim poligonam regularem, eſt ut latus ad radium, ſive catetum baſis.*

In-

Integra coni, ſive pyramidis ſuperficies dimidia eſt (a) rectanguli ex latere in perimetrum a 23.
ABCD: baſis autem ABCD dimidia eſt (b) *hui.* & rectanguli ex radio, ſive cateto in eundem *antec.*
perimetrum ABCD, ergo integra coni, ſive b 17.
pyramidis ſuperficies erit ad baſim, ut rectan- & 18.
gula ipſa, hoc eſt ut latus ad radium, ſive *VII.*
catetum.

XXVII.

Si conica ſuperficies AEC *circulo* GHIK *baſi parallelo ſecetur, erit integra coni* AEC *ſuperficies ad ſuperficiem coni* GEI *ut quadratum ex radio* AX *ad quadratum ex radio* GZ, *vel ut quadratum ex latere* AE *ad quadratum ex latere* GE.

Conica ſuperficies ACE ad circulum ABCD
eſt (c) ut AE ad AX, vel (d) GE ad GZ, & c 26.
conica ſuperficies GEI ad circulum GI eſt ut *huius.*
eadem GE ad GZ, ergo conica ſuperficies d 2.
AEC ad circulum ſuum ABCD erit ut co- VII.
nica ſuperficies GEI ad ſuum circulum GI,
permutandoque conicæ ſuperficies erunt inter
ſe, ut circuli baſium, hoc eſt (e) ut quadrata e 11.
radiorum AX, GZ, ſive laterum AE, GE. VII.

XXVIII.

Si inter latus AE, & *radium baſis* *Arch.*
AX *ponatur media proportionalis* AS, 14. 1.
conica ſuperficies AEC *aequalis erit cir-* *de Sph.*
culo ex radio AS.

a 8. VII. Circulus enim ex radio AS erit (a) ad circulum ex radio AX, ut AE ad AX, ſive ut conica ſuperficies ad eundem circulum baſis ex radio b *Ax.* 1. *I.* AX, ergo (b) conica ſuperficies AEC æqualis eſt circulo ex radio AS.

XXIX.

Figura VII. & VIII. *Conorum* AEC, LVM *ſuperficies ſunt inter ſe, ut rectangula ex lateribus in radios.*

Inter latera, & radios ſumantur mediæ proportionales AS, LF. Conica ſuperficies AEC c *Ant.* æqualis eſt (c) circulo ex radio AS, & conica ſuperficies LVM æqualis eſt circulo ex radio LF, ergo permutando conicæ ſuperficies erunt inter ſe ut circuli, ſive quadrata ex radiis AS, LF, ſive ut rectangula ex lateribus in d 13. VI. radios, quæ quadratis ipſis æqualia ſunt (d).

XXX.

Quaelibet cylindrica ſuperficies LT *ad conicam ſuperficiem* AEC *eſt ut rectangulum per axim* LT *ad rectangulum ex latere* AE *in radium* AX.

e 20. *huius* Cylindrica ſuperficies LT æqualis eſt (e) circulo ex radio LF, & conica ſuperficies æqualis f 28. *huius* eſt (f) circulo ex radio AS, ergo cylindrica ſuperficies erit ad conicam, ut quadratum ex g 21. *huius* LF, ſive ipſi æquale (g) rectangulum per axim LT ad quadratum ex AS, ſive ad ipſi æquale (h) h 13. VI. rectangulum ex latere AE in radium.

Fru-

XXXI.

Fruſti conici A I *ſuperficies ad integram coni* A E C *ſuperficiem eſt ut rectangulum ex* A G *in utrumque radium* A X, G Z *ad rectangulum ex latere* A E *in radium* A X. Arch. 16. 1. de Sph. Figura IX.

Super A E ponatur perpendicularis A M æqualis radio A X, completoque rectangulo A N, ducatur diameter M E, & ordinetur Q R, G O, eritque (a) G P æqualis ipſi G Z. Integra coni ſuperficies A E C ad conicam ſuperficiem G E I eſt (b) ut rectangulum ex latere A E in radium A X ad rectangulum ex latere G E in radium G Z, hoc eſt ut rectangulum A N ad rectangulum G R, ergo per converſionem rationis integra coni ſuperficies erit ad reliquam fruſti conici ſuperficiem, ut rectangulum A N ad reliquum ſpatium nempe ad duo ſimul rectangula A O, O R; ſed rectangulum A O eſt æquale rectangulo ex A G in radium A X, & rectangulum O R eſt (c) æquale rectangulo A P, hoc eſt rectangulo ex eâdem A G in radium G Z, ergo invertendo fruſti conici ſuperficies ad integram coni ſuperficiem eſt ut rectangulum ex A G in utrumque radium A X, G Z ad rectangulum ex latere A E in radium A X.

a Ex 2. VII. b 29. huius. c 13. IV.

XXXII.

Si fruſti conici latera A G, C I *bifariam dividantur in* Q, R, *jungaturque* Q R, *rectangulum ex* A G *in* Q R *erit æquale rectangulis ex* A G *in utrumque radium* A X, G Z. Fig. X.

 Jun-

Jungatur QZ, AI, XR.

a 2. VII. Quia in triangulis ſimilibus (a) GAI, QAS latus GA duplum eſt (b) lateris AQ, erit & la-
b *Ex conſtr.* tus GI duplum lateris QS, adeoque radius GZ æqualis erit rectæ QS; ſimiliter in triangulis AIC, SIR, ſicuti latus CI duplum eſt
c 19. VI. lateris IR, etiam latus AC duplum erit (c) lateris SR, adeoque radius AX æqualis erit rectæ SR, ergo rectangulum ex AG in totam QR erit æquale rectangulis ex eâdem AG in utrumque radium AX, GZ.

XXXIII.

Figura VII. & X. *Fruſti conici ſuperficies* AI *ad quamlibet cylindricam ſuperficiem* LT *eſt ut rectangulum ex* AG *in* QR *ad rectangulum per axim* LT.

d 31. *huius*. Fruſti conici ſuperficies AI eſt (d) ad integram coni ſuperficiem AEC ut rectangulum ex AG in utrumque radium AX, GZ, ſive ipſi æ-
e *Ant.* quale (e) rectangulum ex AG in QR, ad rectangulum ex latere AE in radium AX; eademque conica ſuperficies ad cylindricam ſuperfi-
f 30. *huius*. ciem eſt (f) ut idem rectangulum ex AE in AX ad LT rectangulum per axim cylindri, ergo ex æquo fruſti conici ſuperficies eſt ad cylindricam ſuperficiem ut rectangulum ex AG in QR ad rectangulum per axim LT.

XXXIV.

Si quilibet arcus circuli ABC *in*
Figura XI. *quotcumque aequales partes dividatur in* D, B, E, *inſcriptaque fuerint arcui diviſo quotcumque latera aequalia* AD,

DB,

DB, BE, EC, *conicae ſuperficies, quae deſcribentur a lateribus ipſis circa diametrum* OB *revolutis, ſemper aequales erunt cylindricae ſuperficiei, quae deſcribitur a rectangulo* IB, *cujus altitudo aequalis eſt altitudini, vel parti diametri* GB, *baſis autem* IG *aequalis eſt cateto, ſive perpendiculari* OM, *quae ad aliquod latus* AD *ducatur ex centro* O.

Per ſingulas laterum extremitates A, C, D, E
ordinentur rectæ AC, DE, atque per puncta M, H, in quibus inſcripta latera perpendi-
culariter, atque biſariam (a) a cateto ſecantur, a 1. V.
ordinentur aliæ MN, HK. Quoniam, ob rectos,
& æquales angulos OHB, HPB, triangula
OHB, HPB ſimilia ſunt (b), erit OH ad HP, b 28.
ut HB ad BP, ſive duplicando omnes termi- VII.
nos erit SH ad HK, ut DB ad BR, adeoque
rectangulum ex extremis SH, BR, nempe re-
ctangulum LX, erit (c) æquale rectangulo ex DB c 12.
in HK, ſive (d) in DR; ſed ut rectangulum ex VI.
DB in DR ad rectangulum LX, ita conica d 32.
ſuperficies a latere DB, ſive a triangulo DBR *huius*.
genita ad cylindricam ſuperficiem genitam a
rectangulo LX (e), ergo conica ſuperficies ex pri- e 30.
mo latere BD deſcripta æqualis eſt cylindricæ *huius*.
ſuperficiei ex primo rectangulo LX deſcriptæ.

At verò reſpectu ſecundi lateris AD, de-
mittatur perpendicularis DQ. Cùm itaque tam
duo anguli LDA, ADQ (f), quàm duo DMZ, f 5. IV
ZMO æquales ſint uni recto, vel inter ſe, dem-
ptis alternis, & æqualibus angulis LDA,
DMZ,

DMZ, etiam reliqui ADQ, ZMO æquales erunt; unde, ob rectos etiam, & æquales angulos MZO, DQA, triangula OMZ, ADQ
a 1. VII. ſimilia erunt, adeoque (a) latus OM erit ad MZ, ut latus AD ad DQ, atque rectangulum ex
b 11. VI. extremis OM, DQ erit (b) æquale rectangulo ex intermediis MZ, AD, & duplicando antecedentes terminos rectangulum ex TM in DQ, nempe rectangulum IY, erit æquale rectangulo ex MN in AD; ſed ut rectangulum ex MN in latus AD ad rectangulum IY, ita fruſti conici ſuperficies deſcripta a latere AD, ſive trapetio ADEC circa diametrum OB revoluto ad cylindricam ſuperficiem genitam a rectan-
c Ant. gulo IY (c), ergo conica ſuperficies genita a ſecundo latere æqualis erit cylindricæ ſuperficiei genitæ a ſecundo rectangulo: quod cùm ubique verificetur quicumque laterum numerus aſſumatur, omnes conicæ ſuperficies genitæ a lateribus arcui inſcriptis ſemper æquales erunt omnibus cylindricis ſuperficiebus genitis a correſpondentibus ſibi rectangulis, hoc eſt a rectangulo IX.

XXXV.

Quod *ſi propoſita circuli portio, vel arcus ſit ſemicirculus ipſe, tunc omnes conicae ſuperficies, quae deſcribentur, ſive gignentur a quotcumque lateribus poligoni regularis, quod diviſâ ſemper indefinitè bifariam ſemicirculi peripheriâ eidem ſemicirculo inſcribatur, aequales erunt cylindricae ſuperficiei, quae generatur ab*

in-

integrâ revolutione rectanguli, cujus altitudo ſit ipſe radius, baſis autem catetus, vel perpendicularis ad aliquod perimetri, ſive poligoni latus.

XXXVI.

Cujuſcumque portionis, ſive ſegmenti ſphaerici curva ſuperficies genita ab arcu circulari A B C *circa diametrum revoluto ſemper aequalis eſt cylindricae ſuperficiei genitae ab integrâ revolutione rectanguli* V B, *cujus altitudo ſit eadem altitudo ſegmenti, ſive pars axis* G B, *baſis autem radius* O A, *vel* G V.

Nam circularis arcus A B C ex infinitis lateribus componitur, quorum catetus, vel perpendicularis a centro eſt ipſe radius O A, aut G V, ergo ſuperficies omnes ab infinitis illis lateribus genitæ, nempe tota ſegmenti ſphærici ſuperficies æqualis erit cylindricæ ſuperficiei genitæ a rectangulo V B, cujus altitudo ſit G B, baſis autem catetus, perpendicularis, ſive radius O A.

XXXVII.

Integra quoque hemiſphaerii ſuperficies, quae gignitur a ſemicirculo circa diametrum revoluto, aequalis eſt cylindricae ſuperficiei, quae gignitur ab integrâ revolutione rectanguli Θ B, *cujus altitudo ſit radius* O B, *baſis autem idem radius* O A, *vel* Θ O: *hoc eſt integra hemiſphaerii*

rii ſuperficies aequalis eſt curvae ſuperficiei circumſcripti ſibi cylindri.

XXXVIII.

Arch. 40. & 41. I. de Sph. Figura XVI. *Curva cujuſcumque portionis, ſive ſegmenti ſphaerici ſuperficies genita ab arcu* ABC *circa axim revoluto ſemper aequalis eſt circulo, cujus radius aequalis eſt chordae* AB.

Cylindrica ſuperficies genita a rectangulo DE ad circulum ex radio BA eſt (a) ut rectangulum ipſum DE, ſive rectangulum ex FB in BG ad quadratum ex BA, ſed rectangulum FBG eſt æquale (b) quadrato ex BA, ergo cylindrica ſuperficies; vel æqualis ipſi ſegmenti ſphærici ſuperficies æqualis erit circulo ex radio BA.

a *Ex* 20. *hu.* b *Ex* 12. VI. & 29. VII.

XXXIX.

Arch. 3. II. de Sphær. Facilè eſt ergo *propoſitae ſphaerae ſuperficiem in datâ ratione dividere*

Applicando circulo genitori chordam BA, cujus circulus ad circulum genitorem ſphæræ habeat rationem datam; quam enim rationem habebunt ejuſmodi circuli, habebunt ſphæricæ ſuperficiei portiones, quæ circulis ipſis æquales ſunt.

XL.

Sic etiam *integra hemiſphaerii ſuperficies genita a ſemicirculo* HBI, *vel aequalis ipſi cylindrica ſuperficies ex rectan-*

gulo

gulo HE, *aequalis eſt circulo ex radio* BH.

Eſt enim cylindrica ſuperficies ad circulum ut rectangulum FBO ad quadratum ex BH, hoc eſt æqualis ipſi (a). a 29. VII. & 12. VI.

XLI.

Sphaerica ſuperficies aequalis eſt circulo, qui deſcribatur ab axe FB *veluti radio.*

Sphærica ſuperficies dupla eſt ſuperficiei hemiſphærii, ſicuti circulus ex radio FB duplus eſt (b) circuli ex radio BH, quemadmodum ergo ſuperficies hemiſphærii æqualis eſt circulo ex radio BH, ita ſphærica ſuperficies æqualis erit circulo ex radio FB. b Ex 11. & 33. VII.

XLII.

Sphaerica ſuperficies quadrupla eſt circuli genitoris. Arch. 31. I. de Sph.

Nam ſphærica ſuperficies æqualis eſt circulo ex radio FB, qui quadruplus eſt (c) circuli ex radio OB, ſicuti quadratum ex FB quadruplum eſt quadrati ex OB. c 22. VII.

XLIII.

Curva cylindrica ſuperficies ſphaerae circumſcripta unà cum baſibus, ſeſquialtera eſt curvae ſuperficiei ejuſdem ſphaerae. Arch. 32. I. de Sph.

Curva cylindrica ſuperficies demptis baſibus æqualis eſt (d) integræ ſphæricæ ſuperficiei, ſive (e) quatuor circulis genitoribus, ergo curva cylindrica ſuperficies unà cum baſibus æqualis erit d 37. huius. e Ant.

ſex

ſex circulis genitoribus, adeoque ſeſquialatera ſuperficiei ſphæricæ, quæ quatuor ſolùm circulis æquatur.

XLIV.

Si eidem ſphaerae cylindrus, & conus aequilaterus circumſcribatur, erit conica
Figura XVIII. *ſuperficies unà cum baſi ſeſquilatera ſuperficiei cylindricae unà cum baſibus.*

Conjunctis punctis D, E, F, in quibus trianguli æquilateri latera circulum tangunt, & bifariam dividuntur, junctâque EI; erit quadra-
a 33. VII. tum ex DI, hoc eſt (a) quadrata DE, EI, quadrupla (b) quadrati ex OI, ſive EI, adeo-
b 22. VII. que quadratum ex DE triplum quadrati ex eâdem EI.

c 26. *huius.* Conica ſuperficies eſt (c) ad circulum baſis ex radio DA ut BA ad AD, hoc eſt dupla, er-
Figura XVIII. go integra coni ſuperficies unà cum baſi tripla erit ejuſdem baſis, hoc eſt erit ad ipſam, ut 9 ad 3; ſed circulus ex radio AD, vel DE triplus ſimiliter eſt circuli ex radio EI, vel OI, nempe circuli genitoris DEIF, ergo conica ſuperficies unà cum baſi erit ad circulum genitorem, ut 9 ad 1, ſed cylindrica ſuperficies unà cum baſibus ad circulum genitorem eſt
d *Ant.* ut 6 ad 1 (d); ergo ex æquo conica ſuperficies erit ad cylindricam ut 9 ad 6, ideſt erit illius ſeſquilatera.

LIBER

LIBER IX.

De Corporum mole, ſeu dimenſione.

DE variâ Corporum, ſolidorumque ſuperficie ſatis, ut opinor, ſuperiori libro jam dixi, ſupereſt modò, ut eorundem corporum molem, ſoliditatemque dimetiar, varias nimirum corporum ſpecies inter ſe conferam, eamque rationem exhibeam, quæ inter illa maximâ, & immortali gloriâ ab Archimede, âliiſque Geometris eſt inventa. Quam quidem alteram, nobilioremque Stereometriæ partem ſic a me pertractatam confido, ut pulcherrimarum rerum cognitio, quam ſubobſcuram olim, difficilemque eſſe non immeritò fortaſſe plurimi querebantur, longè hìc nitidior, & facilior effulgeat; cùm præſertim maximus illi ex ſuperiori libro, atque incredibilis ſplendor accedat. Ubi verò quis hac faciliori Propoſitionum ſerie, vel ordine duos ejuſmodi libros attigerit, nullus dubito, quin ille acriori divinæ hujus facultatis amore incendatur, admirans nempe quàm ferax, & ampla rerum præſtantiſſimarum ſeges ex paucis veluti ſeminibus humanæ menti aperiatur.

PRO-

PROPOSITIONES.

I.

SI priſma triangulare A C E *ſecetur a planis parallelis* ABC, GHI,
Fig. II. DEF, *erunt diviſi priſmatis partes* ACH, GIE *inter ſe ut illarum altitudines, ſive latera* AG, GD.

Priſma A C E componitur ex tot planis, quæ parallela ſint lateri, ſive plano A D E B, quot ſunt puncta in rectâ C O, quæ ex aliquo puncto C perpendicularis ducatur ad oppoſitum latus A B. Aſſumatur itaque quodlibet punctum P, extendaturque per ipſum planum M K L N lateri, ſive plano A D E B paralle-
a 5. VIII. lum. Manifeſtè apparet (a), quod communes hujus tranſverſi plani ſectiones cum planis priſma ambientibus, nimirum rectæ lineæ M K, K L, L N, N M, parallelogrammum efficient, quod a rectâ lineâ, ſive communi ſectione Q R in duas partes dividetur.

b 3. VI. Cùm itaque ſit (b) parallelogrammum M R ad parallelogrammum Q L ut altitudo M Q ad
c 10. IV. Q K (c), ſive A G ad G D, idque de ſingulis parallelogrammis, quæ per ſingula puncta perpendicularis C O extendantur parallela lateri A D E B, verificetur, erunt omnia parallelogramma in priſmate A C H; hoc eſt idem priſma, ad omnia ſimul parallelogramma in priſmate G I E, ideſt ad idem priſma G I E,

ut

ut parallelogrammum AH ad GE, nempe ut altitudo, vel latus AG ad GD.

Aliter Priſma componitur ex tot ſuperficiebus priſmaticis ſibi ſucceſſivè concentricis, ac parallelis quot ſunt puncta in OP dimidio perpendicularis OC; cùm itaque quælibet ex his ſuperficiebus dividatur (a) a tranſverſo plano GHI in ratione altitudinum AG, GD, etiam ſuperficies omnes ſimul ſumptæ, ſive priſma ACE, quod ex ipſis componitur, in eâdem ratione altitudinum dividetur. a 18. VIII.

II.

Quod verò de priſmate triangulari verificatur, verificatur etiam in priſmate cujuſcumque baſis. Eucl. 25. XI.

Hoc etenim priſma totidem priſmatîs triangularibus componi concipitur, vel in tot priſmata triangularia dividi poteſt, quot in baſi triangula diſtinguuntur; adeoque quod de ſingulis triangularibus oſtenſum eſt, de poligonis etiam oſtendi poterit.

III.

Etiam *partes cylindri* AI, *qui planis* AC, OQ, GI *parallelis dividatur, ſunt inter ſe ut partes axis, vel altitudinis ejuſdem cylindri.* Eucl. 13. XII. Figura VI.

Cylindrus enim componitur ex tot curvis cylindricis ſuperficiebus, ſibique concentricis quot ſunt puncta in radio XA; ſingulæ verò cylindricæ ſuperficies dividuntur a planis parallelis, ut dividitur axis, aut altitudo AG (b), ergo (c) omnes quoque cylindricæ ſuperficies, b 18. VIII. c 9. I.

ſive cylindrus, in eâdem ratione dividetur ac altitudo, adeoque cylindri diviſi partes erunt ut altitudines, vel partes axis.

IV.

Eucl. 5. & 6. XII. Figura III. IV. *Pyramides* ABCDE, LMNO, *ſuper quibuſcumque baſibus, & aequali altitudine, hoc eſt inter plana parallela, conſtitutae ſunt inter ſe ut baſes* ABCD, LMN.

Alterutra pyramis componitur ex tot planis inter ſe, eidemque baſi parallelis, quot ſunt puncta in altitudine XE, VO. Sumantur itaque in æqualibus altitudinibus XE, VO quæcumque partes æquales EZ, OY, atque per puncta Z, Y extendantur plana baſibus parallela, quæ efficient (a) in utrâque pyramide ſectiones poligonas baſibus ſimiles; unde baſis ABCD erit (b) ad ſectionem GHIK ut quadratum ex altitudine EX ad quadratum ex altitudine EZ, ſive ut quadratum ex OV ad quadratum ex OY; nempe ut baſis LMN ad ſectionem ſimilem PQR, ergo permutando erit baſis ABCD ad baſim LMN ut ſectio GHIK ad ſectionem PQR, atque ita ſemper, ergo ſectiones omnes in pyramide ABCDE, hoc eſt ipſa pyramis, erunt ad omnes totidem ſectiones in aliâ pyramide LMNO, hoc eſt ad pyramidem ipſam, ut baſis ABCD ad baſim LMN.

a 10. VIII. b 11. VIII.

Hinc

V.

Hinc facilè apparet, quod *ſi pyramides aequè altae sint ſuper eâdem, vel aequalibus baſibus, erunt aequales inter ſe.*

VI.

Coni, qui eandem altitudinem, & quaſ- Eucl.
cumque baſes habuerint, ſunt inter ſe ut 11.
baſes ipſae, vel circuli baſium. XII.

Nam coni ſunt pyramides ex infinitis lateribus; adeoque pyramidum inſtar erunt inter ſe ut baſes, ſeu circuli baſium.

VII.

Et *ſi coni aequè alti eandem, vel aequales baſes habuerint, aequales erunt.*

Nam pyramides quoque quotcumque laterum iiſdem poſitis æquales ſunt.

VIII.

Priſma triangulare, cujus oppoſitae ba- Eucl. 7.
ſes parallelae ſunt ABC, DEF, *tri-* XII.
plum eſt inſcriptae ſibi pyramidis ABCF, Figura
quae nimirum eandem baſim, & altitu- XVII.
dinem habeat, hoc eſt inter eadem plana oppoſita parallela contineatur.

Ducatur planum BFD, eritque (a) pyramis, quæ a 5.
baſim habet DEF, & verticem B, æqualis py- huius.
ramidi, quæ baſim habet æqualem ABC, & verticem F, cùm habeant baſes æquales, ac inter plana parallela, ſive æquali altitudine ſint conſtitutæ; ſed pyramis etiam, quæ baſim habet

 ADF,

ADF, & verticem B, æqualis eſt pyramidi habenti baſim AFC, & eundem verticem B, ergò tres pyramides illæ æquales erunt, adeoque integrum priſma triplum erit inſcriptæ ſibi pyramidis ABCF, ſive AFCB.

IX.

Priſmata cujuſcumque baſis tripla ſunt pyramidum, quae eandem cum priſmate baſim, & altitudinem habeant.

Diviſâ enim baſi poligonâ in triangula, dividi quoque poterit priſma poligonum in totidem priſmata triangularia, atque ſimiliter pyramis poligona in totidem pyramides triangulares, ſingula verò priſmata triangularia tripla a *Ant.* ſemper erunt (a) ſingularum pyramidum triangularium ſibi inſcriptarum, adeoque priſmata omnia triangularia ſimul ſumpta, ſive priſma poligonum, triplum erit omnium pyramidum triangularium ſimul ſumptarum, ſive inſcriptæ ſibi pyramidis poligonæ.

X.

Eucl. 10. XII. Figura VII. *Etiam cylindrus* LT *triplus eſt inſcripti ſibi coni* LVM, qui nimirum eandem baſim, & altitudinem, vel axim habet.

Cylindrus enim eſt priſma infinitorum laterum, ſicuti conus eſt pyramis totidem, vel infinitorum laterum cylindro inſcripta; ergo ſicuti quodcumque priſma poligonum ſemper eſt triplum inſcriptæ ſibi pyramidis, ſic etiam cylindrus triplus ſemper erit inſcripti ſibi coni,

Priſ-

XI.

Priſmata LV, AG, *quae ſuper quibuſcumque baſibus* LMNO, ABCD *altitudines* LT, AE *aequales habuerint, erunt ut baſes.* Euclid. 32. XI. Figura XIII. & XIV.

Pyramides enim, quæ iiſdem baſibus, & altitudinibus priſmatibus ipſis inſcriptæ concipiantur, ſunt inter ſe (a) ut baſes; ergo etiam priſmata, quæ pyramidum tripla ſunt (b), erunt ut baſes. a 4. hu. b 9. hu.

XII.

Hinc *ſi priſmatum baſes, & altitudines aequales ſint, priſmata ſimiliter aequalia erunt.*

XIII.

Haec autem de cylindris etiam aequè altis verificantur. Eucl. 11. XII.

Nam tripli ſunt conorum ſibi inſcriptorum (c), quos demonſtravimus eſſe (d) inter ſe ut baſes. c 10. huius. d 6 hu.

XIV.

Priſmata AG, LV, *ſi baſes aequales habeant, erunt ut altitudines.* Figura XII. & XIII.

Ex priſmate altiori auferatur priſma LR, cujus altitudo LP ſit æqualis altitudini AE; eritque (e) priſma LR æquale priſmati AG; ſed priſma LV ad priſma LR eſt (f) ut altitudo LT ad altitudinem LP; ergo idem priſma LV erit ad priſma AG, ut altitudo TL ad altitudinem AE. e 12. huius. f 4. hu.

XV.

Etiam *pyramides ſuper eadem, vel aequalibus baſibus conſtitutae erunt ut altitudines.*

Pyramides enim ſubtriplæ ſunt priſmatum ſibi circumſcriptorum; adeoque, quemadmodum priſmata, ita pyramides erunt ut altitudines.

XVI.

Euclid. 14. XII. *Verificatur hoc etiam de cylindris, & conis, qui baſes aequales habuerint.*

a 3. hu. Sẽper enim erũt (a) inter ſe ut altitudines ipſæ.

XVII.

Euclid. 34. XI. Figura XII. & XIII. *Si priſmata* AG, LV *habuerint baſes* AC, LN *reciprocè proportionales altitudinibus* LT, AE, *erunt aequalia: & e converſo, ſi ſint aequalia, erunt illorum baſes reciprocè proportionales altitudinibus.*

Ex altiori priſmate LV abſcindantur priſma LR, cujus altitudo LP ſit æqualis altitudini
b 11. huius. AE. Erit ergo (b) priſma AG ad æquè altum priſma LR, ut baſis AC ad baſim LN; & priſma LV ad idem priſma LR, ut altitudo
c 2. hu. LT ad altitudinem LP (c), ſive AE; ſed ex hypotheſi baſis AC eſt ad baſim LN, ut altitudo
d Ax. 9. I. LT ad altitudinem AE; ergo (d) priſma AG erit ad priſma LR, ut priſma LV ad idem
e Ax. 2. I. priſma LR, adeoque (e) priſmata AG, LV erunt æqualia.

f Ax. 1. I. Si verò priſmata AG, LV ſupponantur æqualia, eandem habebunt (f) rationem ad idem

priſ-

priſma LR, ſed ratio priſmatis AG ad LR eſt ratio baſis AC ad LN, & ratio priſmatis LV ad idem priſma LR eſt ratio altitudinis LT ad LP, ſive AE, ergo ratio baſium erit reciproca rationis altitudinum, ſive baſes erunt reciprocè ut altitudines.

XVIII.

Eodem ordine oſtendi poterit quod *aequalium cylindrorum, pyramidum, vel conorum baſes altitudinibus reciprocae erunt: & e converſo cylindros, pyramides, & conos, quorum baſes reciprocae ſunt altitudinibus, aequales eſſe.* *Eucl.* 15. & 9. *XII.*

Nam cylindri priſmatum, conique pyramidum proprietates æmulantur.

XIX.

Quicumque conus AEC *aequalis eſt cono, cujus baſis aequalis eſt conicae ſuperficiei ejuſdem coni* AEC, *altitudo verò aequalis eſt rectae* XT, *quae ducatur ex centro* X *perpendicularis ad latus* EC. *Arch.* 17. *I. Sphær.* Figura IX.

Conica ſuperficies ACE ad circulum baſis eſt (a) ut EC ad CX, ſive, ob ſimilitudinem (b) triangulorum ECX, EXT, ut EX ad XT, ergo conica ſuperficies, ſive baſis novi coni eſſet ad baſim dati coni AEC, ut reciprocè altitudo XE ad altitudinem XT, adeoque (c) coni eſſent æquales. a 25. *VIII.* b 28. *VII.* c *Ant.*

Eodem modo oſtenderetur conum GEI æqualem eſſe cuidam cono, cujus baſis eſſet æ-

qualis conicæ ſuperficiei G E I, altitudo verò perpendicularis Z S.

XX.

Arch. 18. I. de Sph. *Rotundum ſolidum, quod producitur a quadrilatero* X G E I *circa axim* X E *revoluto, erit aequale cono, cujus altitudo ſit perpendicularis* X T, *baſis autem circulus aequalis conicae ſuperficiei* GEI.

a 16. huius. b 2. VII. Conus G E I erit (a) ad conum G X I, ut E Z ad Z X, & componendo conus G E I ad duos ſimul conos, ut EZ ad EX, ſive (b) Z S ad XT, ſive conus, cujus altitudo ſit Z S, baſis autem æqualis conicæ ſuperficiei G E I ad conum, cujus altitudo ſit X T, baſis autem æqualis eidem conicæ ſuperficiei; ſed conus G E I æqua- c Ant. lis eſt (c) cono, cujus altitudo ſit Z S baſis autem æqualis eidem conicæ ſuperficiei, ergo etiam duo ſimul coni erunt æquales cono, cujus altitudo ſit X T, baſis autem ſit circulus æqualis conicæ ſuperficiei G E I.

XXI.

Arch. 19. I. de Sph. *Annulus* denique, *ſive rotundum ſolidum excavatum genitum a triangulo* A G X *circa axim* X E *revoluto, erit aequale cono, cujus altitudo ſit perpendicularis* X T, *baſis autem aequalis ſuperficiei fruſti conici* A I.

d 19. huius. Integer conus AEC æqualis eſt (d) cono, cujus altitudo ſit X T, baſis autem integra conica ſuperficies A E C; duo ſimul coni X G E I æqua-

quales ſunt (a) cono, cujus altitudo ſit eadem XT; baſis autem circulus æqualis conicæ ſuperficiei GEI, ergo reliquus annulus æqualis erit reliquo cono, cujus altitudo ſit eadem XT, baſis autem æqualis reliquæ ſuperficiei fruſti conici AI. a *Ant.*

XXII.

Si circuli quadrans, atque integra peripheria in quotcumque aequales partes dividatur, inſcribaturque poligonum quotcumque laterum, erit ſphaerale ſolidum genitum a poligono circa axim OB *revoluto ſemper aequale cono, cujus altitudo ſit perpendicularis* OM, *baſis autem aequalis ſuperficiei ſolidi ejuſdem ſphaeralis.* *Arch. 25. I. de Sph.* Figura XI.

Rotundum ſolidum genitum ab integrâ revolutione trianguli ODB eſt (b) æquale cono, cujus altitudo ſit perpendicularis OH, vel OM, baſis autem æqualis conicæ ſuperficiei, quæ deſcribatur a latere DB; rotundum ſolidum excavatum, quod deſcribitur ab integrâ revolutione trianguli OAD, eſt (c) æquale cono, cujus altitudo ſit eadem perpendicularis OM, baſis autem æqualis ſuperficiei fruſti conici, quæ deſcribatur a latere AD, atque ita ſemper, ergo integrum ſphærale ſolidum ſphæræ inſcriptum erit æquale cono, cujus altitudo ſit perpendicularis OM, baſis autem æqualis curvæ ſuperficiei ejuſdem ſphæralis ſolidi. b 20. *huius.* c *Ant.*

Hinc

XXIII.

Hinc facilè inferri poterit, quod *ſphaera, quae gignitur a circulo* FHBI, *aequalis eſt cono* MON, *cujus baſis, vel circulus ex radio* FM, *ſive* FB *aequalis*
Figura XVI. *eſt ſphaericae ſuperficiei, & altitudo* FO *ſit perpendicularis ad latera, hoc eſt ipſe radius.*

Sphæra enim eſt ſphærale ſolidum genitum a circulo, nempe poligono infinitorum laterum.

Sed aliter etiam oſtendi ſic poteſt.

Sphæra componitur ex tot ſphæricis ſuperficiebus ſibi concentricis, quot ſunt puncta in radio FO, quemadmodum etiam conus componitur ex tot circulis baſi parallelis, quot ſunt puncta in eodem radio FO. Aſſumatur itaque in radio FO quodlibet punctum K, per quod tranſire concipiatur in ſphærâ ſphærica ſuperficies genita a peripheriâ circuli KL, & circulus in cono genitus a radio KP. Quoniam ſphærica ſuperficies genita a circulo
a 40. VIII. FHBI æqualis eſt (a) circulo ex radio FB, & ſphærica ſuperficies genita a circulo KL æqualis eſt circulo ex radio KV, erunt ſphæricæ ſuperficies inter ſe ut circuli ex radiis FB, KV, hoc eſt FO, KO, ſive ex radiis FM, KP; ſed ſphærica ſuperficies ex circulo FHBI æ-
b Hyp. qualis eſt circulo ex radio FM (b) ergo ſphærica ſuperficies ex circulo KLV æqualis erit
c 9. I. circulo ex radio KP, atque ita ſemper, ergo (c) omnes ſphæricæ ſuperficies ſimul ſumptæ, ſive ſphæra ex illis compoſita, æqualis eſt omnibus

bus circulis ſimul ſumptis, ſive cono, qui ex circulis ipſis componitur.

XXIV.

Inferri etiam poteſt, quod *ſphaera eſt ſolidum, ſive corpus majus, ſive capacius ſolidis omnibus ſphaeralibus ſibi iſoperimetris, hoc eſt aequalis ſuperficiei.*

Solidum enim, quod ſit iſoperimetrum ſphæræ, eidem ſphæræ circumſcriptum eſſe non poterit, alioquin illius ſuperficies major eſſet ſuperficie ſphæricâ, ergo ipſius latera intra peripheriam, ſive ſphæricam ſuperficiem cadere debent; adeoque perpendicularis ad eadem latera minor erit radio ſphæræ, ergo etiam conus, cujus altitudo ſit ipſe radius, & baſis ſphærica ſuperficies, nempe (a) ſphæra, major erit cono, cujus altitudo ſit perpendicularis ad latera poligoni, & baſis eadem ſphærica ſuperficies, vel ex hypotheſi ſphæralis ſolidi ſuperficies, hoc eſt (b) eodem ſphærali ſolido. a *Ant.* b 22.

XXV.

Arch. 32. *I. de Sph.*

Hemiſphaerium inſcripti ſibi coni ex triangulo HFI *duplum eſt.* Figura XVI.

Conus ex triangulo MON ad æquè altum conum ex triangulo HFI eſt (c) ut circulus baſis ex radio FM, vel FB, ad circulum baſis ex radio HO, vel OF; ſed circulus ex radio FB quadruplus eſt (d) alterius circuli ex radio OF, ergo conus MON, vel integra ſphæra ipſi æqualis, quadrupla eſt coni HFI, adeoque hemiſphærium inſcripti ſibi coni duplum erit. c 6. *hujus.* d 11. *VII.*

Cy-

XXVI.

Arch. ex 32. I. Sph. *Cylindrus ſphaerae circumſcriptus ſeſquialter eſt ſphaerae.*

Hemiſphærium cono circumſcriptum duplum
a Ant. eſt (a) coni ſibi inſcripti, ſive eſt ad ipſum ut
2 ad 1, cylindrus autem hemiſphærio circum-
b 10. ſcriptus triplus eſt (b) ejuſdem coni, ſive eſt ad
huius. ipſum ut 3 ad 1, ergo cylindrus erit ad hemiſphærium inſcriptum ut 3 ad 2, ſive ſeſquialter, adeoque cylindrus integer ſphæræ circumſcriptus ſeſquialter erit ejuſdem ſphæræ.

XXVII.

Figura XVIII. *Conus aequilaterus ſphaerae circumſcriptus ſeſquialter erit cylindri, qui eidem ſphaerae circumſcribatur.*

Inſcriptum, circumſcriptumque ſit circulo triangulum æquilaterum A B C, D E F, poſitiſque D G, D H æqualibus diametro, vel axi D I, jungantur ex centro O rectæ O G, O A, O C, O H. Quoniam itaque trianguli A B C latera, & perpendicularis B D bifariam ſecan-
c 24. V. tur a latere E F (c), a quo bifariam quoque di-
d 20. V. viditur in V radius O I (d), erit recta D V tripla rectæ O V, adeoque tota perpendicularis D B ſextupla rectæ O V, & tripla alterius rectæ, ſive radii D O; unde etiam conus ex triangulo æquilatero A B C ſphæræ circumſcriptus erit ad conum ſuper eandem baſim
e 22. ex triangulo A O C, ut altitudines, hoc eſt
VII. ut 3 ad 1, vel ut 9 ad 3; cùm verò cir-
f Ex culus ex radio D G, vel D I quadruplus ſit (e)
10. V. circuli ex radio O I, ſive (f) I E, erit ad ipſum

ut

ut 4 ad 1; ideoque erit ad reliquum (a) circulum ex radio DE ut 4 ad 3. Circulus itaque ex radio DE, vel DA ad circulum ex radio DG, ſive (b) conus ex triangulo AOC ad conum ex triangulo GOH, vel ad ſphæram ipſi æqualem (c), erit ut 3 ad 4, ergo ex æquo conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus erit ad ſphæram ipſam, ut 9 ad 4; ſed ſphæra ad circumſcriptum ſibi cylindrum eſt (d) ut 4 ad 6, ergo iterum ex æquo conus æquilaterus erit ad cylindrum ut 9 ad 6, ſive ipſius ſeſquialter.

a *Ex* 11. & 33. VII.
b 13. *huius*.
c 23. *huius*.
d 26. *huius*.

XXVIII.

Cùm itaque in Propoſitione XLIII. libri VIII. oſtenſum fuerit, integram ſuperficiem coni æquilateri ſphæræ circumſcripti ſeſquialteram eſſe integræ ſuperficiei cylindricæ, quæ eidem ſphæræ circumſcribatur; atque ſimiliter Propoſitione XLII. cylindricam hanc ſuperficiem ſeſquialteram eſſe ſphæricæ ſuperficiei, manifeſtè apparet, quod *eadem ſeſquialtera ratio tam quoad ſuperficiem, quàm quoad ſoliditatem in cono aequilatero, & cylindro ſphaerae circumſcriptis, eâdemque ſphaerâ continuatur*.

Torr. prop. 31. *II. de Sph.*

XXIX.

Priſmata quaecumque LR, AG *ſunt inter ſe in ratione compoſitâ ex rationibus baſium, & altitudinum*.

Figura XIII. & XIV.

Priſ-

Priſmatis L R latera ſic extendantur, ut fiat
a 1. II. priſma L V æquè altum priſmati A G; eritque (a) priſma L R ad priſma A G in ratione compoſitâ ex ratione priſmatis L R ad priſma L V, & ratione priſmatis L V ad priſma A G, ſed
b 14. huius. ratio priſmatis L R ad priſma L V eſt (b) ratio altitudinis L P ad altitudinem L T, ſive A E,
c 11. huius. & ratio priſmatis L V ad priſma A G eſt (c) ratio baſis L N ad A C; ergo ratio priſmatis L R ad A G componitur ex ratione baſium, & altitudinum.

XXX.

Arch. 11. de Conoid. Sphær. Etiam *cylindri, pyramides, conique, quomodocumque comparentur, erunt in ratione compoſitâ ex ratione baſium, & altitudinum.*

XXXI.

Euclid. 33. XI. Figura XIII & XIV. *Si priſmata* L R, A G *ſimilia ſint, erunt in triplicatâ ratione altitudinum, ſive quorumcumque laterum homologorum, ſive perimetrorum.*

Priſmata quæcumque ſunt inter ſe in ratione compoſitâ ex ratione baſium, & altitudinum; ſed, ob ſimilitudinem priſmatum, illorum ba-
d *Def.* 15. VIII. ſes ſunt (d) in duplicatâ ratione laterum homologorum, ſive altitudinum, ergo priſmata ſimilia erunt inter ſe in ratione compoſitâ ex ratione duplicatâ, & ex ratione ſimplici altitu-
e *Ex* 10. *&* 13. VII. dinum, adeoque erunt in triplicatâ ratione altitudinum, ſive laterum homologorum, aut etiam (e) perimetrorum.

Hinc

Hinc autem facilè apparet celeberrimum illud problema, quod ab oraculo fertur propoſitum de Cubi duplicatione non aliâ ratione ſolvi potuiſſe, quàm ſi inter lineam propoſiti cubi latus, ejuſque duplam inveniantur duæ rectæ continuè proportionales, quod Propoſitione 13. libri XI. oſtendetur, tunc enim foret (a) cubus ex primâ A D ad cubum ex ſecundâ in triplicatâ ratione ejuſdem primæ A D ad ſecundam, ſive in ratione primæ ad quartam, hoc eſt in ratione ſubduplâ, ſive cubus ex ſecundâ duplus eſſet cubi propoſiti ex primâ. a *Ant.*

XXXII.

Etiam *pyramides ſimiles erunt in triplicatâ ratione laterum homologorum, aut altitudinum.* *Eucl.* 8. XII.

Nam priſmata pyramidibus ſimilibus circumſcripta ſimilia ſunt (b), adeoque eadem priſmata, ſive pyramides, tertiæ nimirum priſmatum partes, erunt in eâdem triplicatâ ratione altitudinum, ſive laterum homologorum. b *Ex def.* 15. VIII.

XXXIII.

Cylindri quoque, *vel coni ſimiles erunt in ratione triplicatâ altitudinum, ſive perimetrorum, aut diametrorum.* *Eucl.* 12. XII.

Cylindri ſunt priſmata, coni verò pyramides infinitorum laterum, ideoque ſicuti priſmata ſimilia, vel ſimiles coni ſunt in triplicatâ ratione altitudinum, ſive perimetrorum, in hac eâdem ratione erunt cylindri, vel coni.

Ita-

XXXIV.

Figura VIII. Itaque *ſi conus* AEC *tranſverſo plano baſi parallelo ſecetur, integer conus* AEC *ad ablatum, ſibique ſimilem* (a) *conum* GEI *erit in triplicatâ ratione altitudinis* XE *ad* ZE, *ſive radii* XA *ad* ZG.

a *Defin* 15. VIII. & *prop.* 15. VII.

XXXV.

Secabitur ergo *conus* AEC *in quâcumque datâ ratione rectae* XE *ad* N

b *Ex* 13. XI. Si aſſumptis (b) inter XE, & N duabus mediis proportionalibus L, M abſcindatur EZ æqualis ipſi L, ducaturque per Z circulus GHIK.

c 33. *huius.* d 5. II. Erit enim (c) conus AEC ad conum GEI in triplicatâ ratione rectæ XE ad EZ, hoc eſt (d) in ratione datâ rectæ XE ad N.

XXXVI.

Quod ſi ex altitudine XE auferatur XO æqualis ipſi N, per converſionem rationis *erit integer conus ad fruſtum* AI *circulis parallelis interceptũ ut* XE *ad* EO.

XXXVII.

Euclid. 18. XII. *Sphaerae* ABCD, EFGH *ſunt in triplicatâ ratione diametrorum* AC, EG.

Figura XV. e *Defin.* 15 VIII. f 33. *huius.* Si etenim ſphæris cylindri circumſcribantur, erunt ejuſmodi cylindri ſimiles inter ſe (e), cùm in ipſis diametri baſium ſint proportionales, & æquales altitudinibus, adeoque cylindri ſimiles ſphæris circumſcripti erunt (f) inter ſe in triplicatâ ratione altitudinum, ſive diametro-

trorum; ergo etiam ſphæræ, quæ circumſcriptorum cylindrorum ſubſeſquialteræ ſunt (a), erunt in eâdem ratione triplicatâ diametrorum. a 26. *huius.*

XXXVIII.

Si quilibet ſector circularis ABCD *circa axim* EB *convertatur, ſector ſphaericus inde genitus erit aequalis cono, qui gignitur ex triangulo* FDB, *cujus altitudo ſit radius* BD, *& baſis* FB *aequalis chordae* BA. *Arch.* 42. I. *de Sph.* Figura XIV. Tab. 7.

Aſſumpto quolibet puncto I ordinetur in triangulo recta IO, deſcribaturque circulus IMN. Cùm itaque, ob latera BD, AD proportionaliter ſecta in I, M, adeoque (b) ob rectas BA, IM parallelas, ſit BA ad IM, ut BD ad DI, vel BF ad IO, erit (c) circulus ex radio BA ad circulum ex radio IM, ut circulus ex radio BF ad circulum ex radio IO; permutandoque circulus ex radio BF in cono ad circulum ex radio BA, vel æqualem ſibi (d) ſphæricam ſuperficiem ex arcu BA in ſectore ſphærico, ut circulus ex radio IO in cono ad circulum ex radio IM, ſive æqualem ſibi ſphæricam ſuperficiem ex arcu IM in ſectore; ſed circulus ex radio BF æqualis eſt (e) ſuperficiei ex arcu BA, ergo etiam circulus ex radio IO erit æqualis ſuperficiei ex arcu IM, atque ita ſemper, ergo circuli omnes in cono, ſive conus, erit æqualis omnibus ſuperficiebus, ſive ſectori ſphærico. b 20. VI. c 9. VII. d 37. VIII. e *Ex hypoth.*

XXXIX.

Reliqua ſphaerae portio ex ſectore AECD *erit aequalis cono, qui baſim habeat circulum ex radio* EA *& altitudinem radium* ED.

Integra ſphæra æqualis eſt cono, cujus baſis ſit circulus ex radio BE, altitudo radius BD (a) ſive (b) æqualis eſt duobus conis, qui baſes habeant circulos ex radiis BA, AE, altitudinem verò radium BD (c), ſed ſector ſphæricus ABCD æqualis eſt primo cono, ergo reliqua ſphæræ portio æqualis erit ſecundo.

a 23. *huius.* b *Ex* 11 *&* 33.VII. c 16. *huius.*

XL.

Si fiat ut BE *ad* EH *ita* PD *ad* DB, *ponaturque* QE *aequalis radio* DE, *dico quod erit* PH *ad* HB, *ut* QH *ad* HE.

Cùm etenim ſit PD ad DB, ut BE ad EH, erit permutando PD ad BE, ſive DQ ut DB, ſive QE ad EH, & componendo PQ ad QD, ut QH ad EH, permutandoque PQ ad QH, ut QD, vel EB ad EH, & dividendo PH ad HQ ut BH ad HE, & iterum permutando PH ad HB, ut QH ad HE.

XLI.

Arch. 2.II *de Sphær.* *Iiſdem poſitis dico ſegmentum ſphaericum genitum ex circulari ſegmento* ABC *ad inſcriptum ſibi conum* ABC *fore ut* QH *ad* HE.

Quum

Quum etenim ſit quadratum ex F B, vel A B ad quadratum ex AH, ut quadratum ex BE ad quadratum ex A E (a), ideſt (b) ut eadem B E ad E H, ſive (c) ut P D ad D B erit circulus ex radio F B, ſive baſis coni F D G ad circulum ex radio A H, ſive ad bâſim conorum A P C, A B C, ut reciprocè altitudo P D ad altitudinem D B, adeoque (d) conus F D G, ſive ipſi æqualis (e) ſector ſphæricus ABCD, æqualis erit cono A P C unà cum cono A D C, ablatoque communi cono A D C, erit conus A P C æqualis ſegmento ſphærico A B C, ſed conus A P C ad conum A B C eſt (f) ut P H ad H B, vel (g) Q H ad HE, ergo ſegmentum ſphæricum ad inſcriptum ſibi conum erit ut Q H ad H E.

a 28. & 9. VII. b 29. VII. c *Ex antec.* d 19. *IX.* e 38. *huius.* f 16. *huius.* g *Ex antec.*

XLII.

Hinc facilè *cognoſci, vel exhiberi poterit ratio, quae inter ſphaeram, ejuſque ſegmentum reperitur.*

Cùm enim cognita ſit ratio ſegmenti ad inſcriptum conum A B C (h); & ejuſdem coni A B C ad conum F D G, ſive æqualem ipſi ſectorem ſphæricum A B C D (i), & inſuper ſectoris A B C D ad reliquam ſphæræ portionem, nempe ratio circuli ex A B ad circulum ex A E (k), ac denique ratio hujus portionis ad conum A D C, ſive componendo ratio portionis ad ſegmentum A E C H A, cognita quoque erit ex æquo ratio ſegmenti ad reliquum ſegmentum, componendoque ratio ſegmenti ad totam ſphæram.

h *Ant.* i 30. *huius.* k 39. *huius.*

LIBER X.

De Conicis Curvis, ſive Sectionibus, earumque Proprietatibus.

Conicarum Sectionum doctrina, cujus inventio Pythagoræ, ſive Menechmo Eudoxi diſcipulo concedi ſolet, etſi a veteribus Geometris exculta, ac mirificè illuſtrata maximo ſemper in pretio, & honore ſit habita, nuperrimis tamen Geometrarum ſtudiis nobiliùs aucta, & adornata noſtrâ hac ætate effulget. Incredibile eſt enim quàm clarior, nitidior, & uberior hæc a Mydorgio, Hiræo, Gregorio a Sancto Vincentio reddita fuerit, aut novis Sectionum proprietatibus feliciter inventis, aut iis, quæ veteribus occultæ prorſus, & incognitæ fuerant, breviùs, atque nitidiùs demonſtratis. Quodſi Geometrarum animi ab eximiâ illius pulchritudine, ac jucunditate olim excitabantur, ut hanc præſtantiſſimam Geometriæ partem addiſcerent, vehementiùs certè egregii adoleſcentes ad illius amorem incendi nunc debent, cùm maxima in naturæ contemplatio-

tione utilitas, & ſplendor exinde oriatur. Plurima ſiquidem, quæ Galileo duce de corporum motibus, reflexione, refractione, cœleſtium corporum orbitâ, atque periodo inventa ſunt, ipſi Conicarum Sectionum doctrinæ conjuncta adeo, & connexa videntur, ut ab illâ Statica, Optica, Aſtronomia, aliæque præſtantiſſimæ Scientiæ pendere propemodum videantur. Diligenter itaque, & accuratè hæc omnia ſcrutanda ſunt, ut ampliſſimus inde ad Phyſicam aditus aperiatur. Atque ego quidem optarem longè plura ex pulcherrimis Geometrarum inventis complecti, ſi id propoſita brevitas, atque operis conſilium pateretur. Illuſtriores tamen Conicarum Sectionum proprietates, & quarum major eſt in Phyſicis uſus, expoſui; & licèt Sectiones ejuſmodi in cono quocumque fieri, ac ſpectari poſſent, ipſas tamen in ſolo rectangulo, & circa primariam ſolùm illarum diametrum, vel axim ſum contemplatus, tum ut brevior, & clarior eſſem; tum ut adoleſcentes ipſi, ſi libeat, utiliter, ac jucundiſſimè exercerentur in iis, quæ de ordinatis ad axem oſtenderam, circa ordinatas ad diametrum quamcumque proprio marte inveſtigandis.

DEFINITIONES.

I.

Conicæ Sectiones, ſive *Conicæ Curvæ* dicuntur illæ, quæ deſcribuntur in ſuperficie coni, dum conus ipſe ſecatur aliquo plano, quod per axem coni non tranſeat, ſed perpendiculare ſit ad planum ipſum per axem tranſiens.

II.

Figuræ verò conicæ, quæ communiter, & abſolutè *Conicæ Sectiones* dicuntur, ſunt illæ figuræ, quæ deſcribuntur in eodem plano ſecante ab ipsâ conicâ ſuperficie, vel a conicâ ſuperficie ſimul, & a circulo baſis coni.

III.

Figura I. II. III. Concipiatur itaque conus ABC, qui bifariam dividatur per axim triangulo ABC, atque deinde conus ipſe alio plano DEFG ſecetur, quod perpendiculare ſit ad planum ABC per axim. Sitque communis horum duorum planorum ſectio linea recta EG, curva DEF, quæ reperitur in conicâ ſuperficie, & ſimul in plano ſecante, erit curva, vel ſectio conica. Integra verò figura, vel ſuperficies DEFGD, quæ deſcribitur in plano ſecante a ſolâ conicâ ſectione, ut in Fig. III. vel a conicâ curvâ ſimul, & a rectâ DF, quæ eſt communis ſectio plani ſecantis, & circuli baſis, ut in Figurâ I. & II. erit conica ſectio, vel Figura conica.

IV.

Si communis planorum ſectio QP ſit parallela diametro baſis AC, ſive parallela baſi trianguli ABC per axim, ſectio MQNP erit circulus (a). *Apoll. 4. I. Conic. a 15. VIII.*

V.

Si EG, quæ ſectionis *axis* dicatur, fuerit, vel axi coni BO, vel alteri lineæ, quæ per punctum B extenſa intra triangulum ABC cadat, parallela; ſive ſi producta versùs E conveniat in aliquo puncto X cum CB latere trianguli per axim ſimiliter extenſo, ſectio, vel figura DEF erit *Hyperbola*. Fig. I.

VI.

Si ſectio, vel axis EG parallelus fuerit rectæ BC, lateri nimirum trianguli, quod per axim ducatur, ſectio DEF erit *Parabola*. Fig. II.

VII.

Si denique ſectio, vel axis EG neque diametro AC, neque lateri BC, neque axi BO parallelus fuerit, ſed omnibus illis obliqua, & utrumque trianguli ABC latus ſecet, tunc ſectio DEFG erit *Ellipſis*. Fig. III.

VIII.

Si axis Hyperbolæ extendatur, aſſumaturque XZ, quæ ſit æqualis ipſi EX, concipiaturque circa axem ZY alia Hyperbola VZT priori ſimilis, & æqualis, duæ Hyperbolæ DEF, VZT *Sectiones oppoſitæ* dicuntur. Fig. I.

IX.

Recta EZ, quæ inter utramque Hyperbolam reperitur, *transverſum latus* Hyperbolæ vocatur; in Ellipſi verò, & in Parabolâ *transverſum latus* eſt idem axis EG.

X.

In quâlibet ſectione conicâ punctum E dicitur *vertex*, aut *apex* illius.

XI.

Apoll. 17. I. Linea EK, quæ per apicem ſectionis conicæ ducitur perpendicularis ad axem, vel ordinatis omnibus parallela, tota extra ſectionem conicam reperitur; ſi enim intra ſectionem caderet, aliquam ordinatam ſibi parallelam ſecaret, quod eſt impoſſibile. Vocetur recta EK *tangens verticalis* ſectionis conicæ.

PROPOSITIONES.

I.

Apoll. 10. I. Fig. II. *SI in parabolâ* DEF *ordinetur ad quodlibet punctum axis* I *recta* MN *parallela rectae, ſive communi ſectioni* DF, *erit quadratum ex* DG, *vel* GF *ad quadratum ex* MI, *vel* IN *ut abſciſſa* GE *ad abſciſſam* EI.

Per idem punctum I extendatur in plano per axim recta QP parallela diametro baſis AC, concipiaturque (a) per utramque rectam QP, MN, quæ rectis AC, DF ſunt parallelæ, tranſire planum MQNP, quod circulo baſis parallelum (b), adeoque circulus erit (c); unde ſicuti quadratum ex ordinatâ DG eſt (d) æquale rectangulo ex AG in GC, ita quadratum ex ordinatâ MI erit æquale rectangulo ex QI in IP, ideoque quadratum ex DG erit ad quadratum ex MI ut rectangulum ex AG in GC

a 2. VIII. b 8. VIII. c 15. VIII. d 30. VII.

GC ad rectangulum ex QI in IP; ſed, ob æqualia (a) latera GC, IP, ejuſmodi rectangula ſunt (b) inter ſe ut reliquum latus AG ad QI, ergo etiam quadratum ex DG erit ad quadratum ex MI ut AG ad QI, ſive (c) ut GE ad EI.

a 10. IV. b 4. VI. c 2. VII.

II.

At *in hyperbolâ iiſdem, ut antea, poſitis, extenſoque axe donec in* X *conveniat cum latere* CB *ſimiliter extenſo, quadratum ex* DG *ad quadratum ex ordinatâ* MI *erit ut rectangulum ex* XG *in* GE *ad rectangulum ex* XI *in* IE.

Apoll. 21. I. Fig. I.

Ratio rectanguli ex CG in GA ad rectangulum ex PI in IQ componitur (d) ex ratione primi lateris CG ad primum latus PI, hoc eſt (e) ex ratione ipſius GX ad XI, & ex ratione ſecundi lateris GA ad ſecundum IQ, hoc eſt ex ratione ipſius GE ad EI, ſed etiam ratio rectanguli ex XG in GE ad rectangulum ex XI in IE componitur iiſdem rationibus GX ad XI, & GE ad EI, ergo (f) ratio rectanguli ex CG in GA, ſive quadrati ex DG, quod ipſi rectangulo æquatur, ad rectangulum ex PI in IQ, ſive ad quadratum ex MI ipſi rectangulo æquale, erit eadem ac ratio rectanguli ex XG in GE ad rectangulum ex XI in IE; adeoque in hyperbolâ quadrata ordinatarum erunt inter ſe ut rectangula ex diſtantiis ordinatarum a centro in abſciſſas, ſive diſtantias earundem ordinatarum a vertice hyperbolæ.

d *Ex* 12. VI. e 2. VII. f 2. *II.*

In

III.

Apoll. *In ellipſi* denique *quadratum ex ordi-*
21. I. *natâ* D V *erit ad quadratum ex ordina-*
Fig.III. *tâ* M I *ut rectangulum ex* E V *in* V G
ad rectangulum ex E I *in* I G.

Extenſis per I, V planis QP, ZX baſi parallelis, rectangulum ex ZV in VX ad rectangulum
a *Ex* ex QI in IP erit (a) in ratione compoſitâ ex ra-
12. VI. tione primi lateris ZV ad primum latus QI,
b 2. hoc eſt (b) in ratione ipſius EV ad EI, & ex
VII. ratione ſecundi lateris VX ad ſecundum latus IP, hoc eſt in ratione ipſius VG ad IG; ſed etiam rectangulum ex EV in VG ad rectangulum ex EI in IG componitur iiſdem rationibus EV ad EI, & VG ad IG,
c 2. *II.* ergo (c) rectangulum ex ZV in VX, ſive ipſi æquale quadratum ex ordinatâ DV, erit ad rectangulum ex QI in IP, ſive ad quadratum ex ordinatâ MI ipſi æquale, in eâdem ratione ac rectangulum ex EV in VG ad rectangulum ex EI in IG; hoc eſt in ellipſi quadrata ordinatarum erunt inter ſe, ut rectangula ex partibus axis.

IV.

Apoll. *Si in parabolâ* A B C *poſt axim* A B,
11. I. *& ordinatam* A C *ſumatur tertia pro-*
Figura *portionalis* B D, *erit quadratum ex* A C
VI. *æquale rectangulo ex* A B *in* B D; *&*
quadratum alterius cujuslibet ordinatae E F *ſemper aequale rectangulo ex* E B *in* B D.

Quia

Quia enim tres rectæ B A, A C, B D ſunt (a) continuè proportionales, erit (b) quadratum ex intermediâ A C æquale rectangulo ex extremis A B, B D. Cùmque in Parabolâ quadratum ex A C ſit (c) ad quadratum ex E F, ut recta A B ad B E, ſive (d) ut rectangulum ex A B in B D ad rectangulum ex E B in B D, erit permutando quadratum ex A C ad rectangulum ex A B in B D ut quadratum ex E F ad rectangulum ex E B in B D, ſed quadratum ex A C eſt æquale rectangulo ex AB in BD (e), ergo etiam quadratum ex E F erit æquale rectangulo E D. a *Hyp.* b 13. VI. c 1. *hu.* d 4. VI. e *Ex conſtr.*

Vocetur recta B D *Parameter*, ſive *latus rectum* parabolæ; & recta D G axi parallela, *Regulatrix* parabolæ; atque, ſi B D ſit æqualis ipſi A B, parabola dicatur *æquilatera*.

V.

Si in ellipſi, & hyperbolâ fiat ut rectangulum ex A C *in* C B *ad quadratum ex ordinatâ* C D *ita axis, vel tranſverſum latus* A B *ad rectam* B E, *quae ſit verticalis tangens ſectionis, junctâque* A E *extendatur* D C *in* F, *erit quadratum ordinatae* C D *ſemper aequale rectangulo ex* B C *in* C F. Apoll. 15. I. Figura IV. & VII.

Cùm enim ex hypotheſi rectangulum ex A C in C B ſit (f) ad quadratum ex C D ut recta A B ad B E, ſive (ob ſimilitudinem triangulorum BAE, CAF (g)) ut recta AC ad CF, ſive (h) ut rectangulum ex A C in C B ad rectangulum ex F C in C B, erit rectangulum f *Hyp.* g 2. VII. h 4. VI.

ex

ex AC in CB ad quadratum ex CD ut idem rectangulum ex AC in CB ad rectangulum ex FC in CB; adeoque (a) quadratum ex CD erit æquale rectangulo ex FC in CB. Deinde quia ut rectangulum ACB ad quadratum ex ordinatâ CD ita eſt (b) rectangulum AHB ad quadratum ex ordinatâ HI; eſtque rectangulum ACB ad quadratum ex CD ut recta AB ad BE, erit etiam rectangulum AHB ad quadratum ex HI ut recta AB ad BE, ſive AH ad HK, ſive ut rectangulum AHB ad rectangulum KHB; ideoque idem rectangulum AHB eandem rationem habebit ad quadratum ex HI, & ad rectangulum KHB, unde quadratum ipſum ex ordinatâ HI ſemper erit æquale rectangulo ex KH in HB.

a Ax. 2. I.

b 2. & 3. hui.

Vocetur recta AFE *Regulatrix* Hyperbolæ, & Ellipſis, & recta BE *latus rectum*, ſive *Parameter*.

Cùmque rectangulum ex FC in CB, quod eſt æquale quadrato ex ordinatâ CD, deficiat in Ellipſi a trapezio FEBC, quod a partibus utriuſque lateris tranſverſi nimirum, & recti, & regulatricis continetur; in Hyperbolâ vero trapezium ipſum excedat, illa *deficiens*, vel Ellipſis; hæc autem Hyperbola, ſive *excedens* vocatur; quamvis Eutocius in Coment. ad I. Conic. Apollonii aliam rationem, vel originem ejuſmodi nominum afferat.

VI.

Fig. V. & IX. *Iiſdem poſitis, ſi utrumque latus tranſverſum, & rectum bifariam in* O, *&* V *dividatur, ducaturque* OMV, *qua-*

dra-

dratum ex ordinatâ H I *duplum erit trapezii* H M V B.

Quia, ob latera A B, E B in eâdem proportione, hoc eſt bifariam ſecta in O, & V, rectæ AE, OV ſunt (a) parallelæ, erit (b) etiam recta K M, rectæ V B, ſive rectæ E V æqualis, & parallela, adeoque (c) triangulum K M N erit æquale triangulo B V N, additoque communi trapezio B N M H, triangulum quoque K H B erit æquale trapezio V M H B; ſed quadratum ex ordinatâ H I ſemper eſt (d) æquale rectangulo ex K H in H B, adeoque (e) duplum trianguli K H B, ergo ſimiliter idem quadratum ex ordinatâ H I duplum erit trapezii V M H B.

a 20. VI.
b 10. IV.
c 10. III.
d *Ant.*
e 7. VI.

Recta O V regulatrici parallela, quæ tranſverſum, rectumque latus bifariam dividit, *ſemiregulatrix*, & punctum O *centrum* Hyperbolæ, & Ellipſis vocatur.

Clariùs id apparet in Parabolâ, in quâ ſemiregulatrix, & regulatrix ſunt axi parallelæ. Diviſo enim bifariam recto latere in X, manifeſtum eſt quadratum ex ordinatâ A C, quod erat æquale rectangulo A D, duplum fore rectanguli A X; ſicuti quadratum ex aliâ ordinatâ E F, quod erat æquale rectangulo E D, duplum erit rectanguli E X.

Figura VI.

VII.

Ad datum punctum M *ſectionis conicae tangentem ducere.*

Apoll. 49. *II.*
Fig. X. XI. XII.

Ductâ regulatrice Q F, & ſemiregulatrice C R ordinetur M K B, factoque ut T K ad K M,

KM, ita KM ad KG, jungatur GM, quæ erit tangens quæſita, hoc eſt omnia illius puncta, præter M, extra ſectionem conicam reperientur.

Sumpto enim quolibet ipſius puncto P, ordinatâque PLV, quia, ob tres TK, KM, KG continuè proportionales (a), quadratum ex KM eſt (b) æquale rectangulo ex TK in KG, adeoque (c) duplum trianguli TKG, & duplum ſimiliter eſt in quâcumque ſectione conicâ idem quadratum ex ordinatâ KM quadrilateri, ſive trapezii TKNR (d), erit triangulum TKG æquale trapezio, ſive quadrilatero TKNR, demptoque communi trapezio TKNO, reliquum etiam triangulum ONG erit æquale reliquo triangulo TOR, adeoque triangulum ipſum ONG majus erit ſolo trapezio VDOR; adjectoque communi trapezio DLNO, erit triangulum DLG majus trapezio VLNR; ſed, ob tres DL, LP, LG ſimiliter continuè proportionales (e), quadratum ex LP eſt æquale rectangulo ex DL in LG, adeoque duplum trianguli DLG, & in ſectione conicâ quadratum ex LH duplum eſt quadrilateri, ſive trapezii correſpondentis VLNR, ergo, ſi triangulum DLG eſt majus quadrilatero, ſive trapezio VLNR, etiam quadratum ex LP majus erit quadrato ex LH; adeoque linea LP major eſt lineâ LH, unde punctum P extra ſectionem conicam reperitur.

a Ex conſtr. b 13. VI. c 7. VI. d Ant. e Ex 2. VII.

VIII.

Figur. iiſd. *Si in axi ſectionis conicae ſumatur* KS *aequalis ipſi* TK, *jungaturque*

SM,

SM, *erit* SM *perpendicularis ad tangentem* MG.

Cùm enim TK, KM, KG poſitæ fuerint continuè proportionales, erit etiam SK ad KM, ut KM ad KG; adeoque (a) angulus SMG, qui ſemicirculo inſcribi poſſet, rectus erit. a *Ex* 30.VII.

Recta SM *Normalis*; linea verò SK *Subnormalis*, ſive *Subtangens* vocetur.

IX.

In parabolâ ſubnormalis KS *ſemper eſt aequalis ſemiparametro* RN. Figura XI.

Cùm enim aſſumpta fuerit (b) KS æqualis ipſi TK, quæ, ob parallelas (c) RC, NS ſemper æqualis eſt (d) ſemiparametro RN, erit etiam ſubnormalis KS ſemper æqualis ipſi ſemiparametro RN. b *Ex hypoth.* c 4. *huius.* d *Ead.*

X.

In ceteris verò ſectionibus ſemiparameter RN *ad ſubnormalem* KS *eſt ut* NC *ad* CK, *hoc eſt ut diſtantia ſemiparametri a centro ſectionis ad diſtantiam illius ordinatae, cui ſubnormalis correſpondet, ab eodem centro.* Fig. X. & XII.

Cùm enim in triangulis TCK, RCN ſit (e) RN ad TK ut NC ad CK, erit etiam RN ad KS, quæ ponitur æqualis ipſi TK, ut diſtantia NC ad diſtantiam CK. e 2. VII.

Iiſ-

XI.

Apoll. 26. I. *Iiſdem poſitis in ellipſi, & hyperbolâ, ductiſque tangentibus verticalibus* QZ, NA, *ſi ex* Q *per* M *ducatur* QMA, *hæc aequales efficiet rectas* NE, EA, *eritque* QX *ad* NE, *ſive* QG *ad* GN, *ut* QK *ad* KN.

a Ex 7. hui. Junctis enim TN, BR, RG: quia triangulum RTO eſt æquale triangulo OGN (a), adjecto communi triangulo GOR triangula quoque RTG, RNG ſuper eâdem baſi RG conſtitu-
b 6.VI. ta erunt æqualia, adeoque (b) lineæ TN, RG erunt parallelæ; ſed parallelæ quoque ſunt TN, BR, quippe quæ conjungant rectas RN, BT, quæ ſunt eidem tertiæ FR æquales, & inter ſe parallelæ, ergo ambæ BR, RG cùm
c Ex 9. III. & 7. IV. ſint eidem TN parallelæ, erunt (c) in directum poſitæ, & unicam lineam rectam BG efficient.

Cum itaque in triangulis BQM, FQA, ob FA,
d 2. VII. & BM parallelas, ſit (d) ut NA ad KM ita NQ ad QK, ſive FN ad BK, & in triangulis RGE, BGM, ut KM ad NE ita KG ad GN, ſive BK ad RN, erit ex æquo ut NA ad NE ita FN ad NR; ſed FN dupla eſt ipſius NR; ergo etiam NA dupla erit ipſius NE;
e Ax. I. I. hoc eſt NE erit æqualis ipſi EA; adeoque (e) erit QX ad NE ut eadem QX ad EA; ſed, ob ſimilitudinem triangulorum QXM, AEM,
f 1.VII. QX ad EA eſt (f) ut XM ad ME, vel QM ad MA, ſive ut QK ad KN, ergo ut QK ad KN, ita QX ad NE, vel QG ad GN.

Hinc

XII.

Hinc *in hyperbolâ* cùm ſit QG ad GN ut QK ad KN, ſitque ſemper QK major ipsâ KN, *erit* etiam QG *major ipsâ* GN, *adeoque punctum* G, *in quo transverſum latus a tangente ſecatur, infra* C *centrum hyperbolae reperietur.* Figura XII.

XIII.

In parabolâ verò recta GN *ſemper aequalis erit ipſi* NK. Apoll. 33. & 35 I. Figura XI.

Cùm enim triangula TRO, GNO ſint (a) æqualia, erit latus GN æquale lateri TR, cui ſimiliter eſt (b) æqualis oppoſita recta NK. a Ex 7. hui. b 10. IV.

XIV.

Iiſdem poſitis in ellipſi, & hyperbolâ, ſi ex N *per idem punctum* M *ducatur linea* NZ, *recta* QZ *biſariam dividetur in* X. Fig. X. XII.

Cùm etenim triangula XZM, ENM ſimilia ſint, erit (c) XZ ad EN ut XM ad ME, ſive, ob triangula QXM, AEM ſimilia, ut QX ad AE; permutandoque XZ ad QX ut EN ad AE; ſed EN eſt æqualis ipſi AE, ergo etiam XZ erit æqualis ipſi QX, adeoque recta QZ biſariam in X dividetur. c 1. VII.

XV.

Rectangulum itaque *ex* QX *in* NE *erit aequale quadranti illius rectanguli, quod fieret ex transverſo latere* QN *in rectum* NF. Apoll. 53. III.

a Ex 5. hui. b 12. VI. Cùm etenim quadratum ex M K ſit (a) æquale rectangulo ex B K in K N, erit (b) B K ad K M, ut ipſa K M ad K N; ſed ut B K ad K M, ita FN ad NA, & ut KM ad KN ita ZQ ad QN, ergo rectangulum ex intermediis ZQ, N A erit c 12. VI. (c) æquale rectangulo ex extremis QN, N F, atque rectangulum ex dimidiâ QX in dimidiam d Ex 4. VI. N E erit (d) æquale quadranti ejuſdem rectanguli, quod fieret ex tranſverſo latere QN in rectum N F.

XVI.

Apoll. 45. III. Fig. II. Tab. 7. & Fig. VIII. Tab. 6. *Si in axe hyperboles, aut ellipſis QKN ſumantur duo puncta V, F ut rectangula ex QV in VN, ſive ex QF in FN ſint aequalia quadranti illius rectanguli, quod fieret ex tranſverſo latere QN in rectum QX, junctaeque fuerint ex V, F ad puncta E, O, in quibus tangentes verticales QE, NO cum laterali MOE conveniunt, rectae EV, VO; EF, FO, anguli EVO, EFO recti erunt.*

e Ex antec. f Ex hypoth. g 12. VI. Cùm enim tam rectangulum ex FQ in ON (e) quàm rectangulum ex QV in V N (f) ſit æquale quadranti ejuſdem rectanguli N Q X, erunt æqualia inter ſe, adeoque (g) erit ut E Q ad QV, ita V N ad ad N O, unde, ob rectos etiam, & æquales angulos EQV, VNO, triangula ſimilia erunt, & æquales erunt in illis anguli QEV, NVO, additoque communiter angulo QVE, æquales etiam erunt duo anguli NVO, QVE ſimul ſumpti duobus angulis QEV,

QVE

QVE ſimiliter ſimul conjunctis; ſed anguli QVE, QEV ſimul ſumpti in triangulo rectangulo EQV ſunt æquales uni recto (a), ergo etiam anguli NVO, QVE ſimul ſumpti uni recto æquales erunt, adeoque etiam angulus EVO rectus erit. Similiter, cùm rectangula ex EQ in NO, & ex QF in FN æqualia ſint, ideoque ſit EQ ad QF, ut FN ad NO, ſimilia erunt (b) triangula EQF, FNO, & æquales in in illis anguli QFE, NOF, additoque communiter angulo OFN, demonſtrabitur angulos OFN, QFE ſimul ſumptos æquales eſſe angulis OFN, NOF ſimul ſumptis, hoc eſt uni recto, cui proinde ſimiliter æqualis erit etiam angulus EFO.

a 16. IV.

b 5. VII.

XVII.

Hinc facilè apparet, quod ſuper EO veluti diametrum circa rectos angulos EVO, EFO, ſive circa quadrilaterum EVFO circulus deſcribi poterit, in quo forent (c) æquales anguli OEF, OVF, qui eidem chordæ OF inſiſtentes peripheriam contingerent in E, & V; ſicuti æquales etiam forent anguli EOV, EFV, quippe qui eidem chordæ EV inſiſtentes peripheriam in O, & F contingerent, aut etiam (in Ellipſi) anguli VEF, VOF, qui communem baſim habentes VF, verticem haberent in peripheriæ punctis E, & O. Cùmque angulus FVO angulo VEQ, & an-

Apoll. 4.6.*III.*

c 15. V.

gulus EFQ oſtenſus fuerit æqualis angulo FON, æquales etiam inter ſe erunt anguli QEV, FEO; quemadmodum etiam æquales erunt anguli NOF, & EOV.

XVIII.

Apoll. 47. III. Figur. iiſd. *Iiſdem poſitis, ſi punctum* H *communis ſectio inclinatarum* EF, VO *cum puncto contactûs* M *conjungatur rectâ* HM, *erit haec tangenti* OE *perpendicularis.*

Niſi etenim foret, ducatur ex H alia quæcumque linea HZ perpendicularis ad OE, ordineturque ad axim recta MK, & conjungatur KZ. Cùm anguli EQV, EZH recti ſint (a), & æquales, ac æquales etiam oſtenſi fuerint anguli QEV, ZEH (b), triangula ZEH, QEV inter ſe ſimilia erunt, adeoque ZE ad EH erit ut QE ad EV, & permutando ZE ad EQ, ut HE ad EV, vel, ob ſimilitudinem triangulorum HEV, HOF, (c) ut HO ad OF; ſed ſimiliter, ob rectos angulos FNO, OZH, & alios NOF, EOV, vel ZOH æquales, adeoque ob ſimilitudinem triangulorum NOF, ZOH, eſt ZO ad OH ut NO ad OF, permutandoque ZO ad ON, ut HO ad OF, ergo ut ZE ad EQ ita ZO ad ON, & permutando ZE ad ZO, ut EQ ad ON; ſed ut EQ ad ON ita QK ad KN, ergo ut EZ ad ZO ita QK ad KN, ideoque in ellipſi recta KZ parallela foret (d) utrique tangenti QE, NO, vel ordinatæ KM, quod eſt impoſſibile, & in hyperbolâ foret dividendo EO ad OZ ut QN ad NK, ſive PO ad OR,

a Ex hypoth. b Ant. c Ant. d Ex 20. VI.

OR, ſive, ob ſimilitudinem triangulorum EPO, MRO, ut eadem EO ad OM, unde (a) rectæ OZ, OM eſſent æquales, quod eſt impoſſibile; impoſſibile eſt igitur quod alia recta præter HM ſit perpendicularis tangenti EO. a *Ax.* 2. *I.*

XIX.

Si ex quolibet ellipſis, aut hyperbolae puncto M *ad puncta* V, F *ſuperiùs inventa inclinentur rectæ* MV, MF, *ducaturque tangens* EOM, *anguli* VME, FMO, *quos inclinatæ cum tangente efficiunt, aequales erunt.* *Apoll.* 48. *III.* Figura VIII. Tab. 6. & Figura II. Tab. 7.

Ductis enim, ut antea, tangentibus verticalibus QE, NO, junctiſque EV, VO; OF, FE, HM; cùm in quadrilatero EMHV anguli oppoſiti EMH, EVH recti ſint (b), & recti quoque ſint anguli OMH, OFH oppoſiti in quadrilatero OMHF, poterunt (c) circuli quadrilateris EMHV, OMHF circumſcribi, ut in majori circulo anguli EMV, EHV eidem chordæ EV inſiſtentes, ac peripheriam in M, & H contingentes æquales ſint (d); ſicuti æquales etiam eſſent anguli OMF, OHF eidem chordæ FO inſiſtentes, & ad M, & H peripheriæ puncta pertingentes; ſed anguli EHV, OHF ad verticem oppoſiti ſunt (e) æquales, ergo æquales etiam erunt anguli EMV, OMF, quos inclinatæ cum tangente efficiunt. b 16. & 18. *hujus.* c *Ex* 16. V. d 15. V. e 8. *III.*

XX.

Dum itaque lumen in V *collocatur, ut radius ex ipſo in quodlibet punctum* M

incidens, atque inde reflexus ſemper æquales angulos, juxta Catoptricae leges, hinc inde efficiat, in aliud punctum F *reflecti debet, vel e contra:* unde ejuſmodi puncta ſectionum *Foci*, vel *Umbilici* vocantur, quòd ibi radii omnes in ſingula curvæ puncta incidentes colligantur, majorem vim exerant, & ignem excitent.

XXI.

Apoll. 52. III. Figura XIII. Tab. 6. *Si ad quodlibet ellipſis punctum* M *inclinentur ex focis* F V, *rectae* V M, M F, *erit illarum ſumma ſemper aequalis axi* QN.

a 9. *huius.* Ductâ (a) per M tangente ZY, deſcriptoque circulo ſuper axi QN, qui tangentem ipſam ſecet in O, I, junctiſque CI, VO, & FI quæ producta conjungatur in D cum inclinatâ V M ſimiliter productâ; ducatur ex centro recta CE perpendicularis ad tangentem OI. Quoniam itaque recta, vel chorda OI perpendiculariter, adeoque (b) bifariam dividitur in E a rectâ CE, & bifariam quoque dividitur recta V F in centro C, erunt (c) tres lineæ VO, CE, FI parallelæ, unde cùm angulus CEI rectus ſit, recti quoque erunt (d), & æquales anguli EIF, EID; ſed angulus etiam FMI æqualis eſt angulo VMO (e), ſive (f) DMI, ergo duo triangula FMI, DMI, quæ latus MI commune, duoſque angulos duobus aliis æquales habent, æqualia erunt inter ſe, adeoque latus MD erit æqua-

b 1. V. c 19. VI. d 7. IV. e 19. *huius.* f 8. III.

quale lateri, vel inclinatæ MF, & latus FI æquale lateri ID; unde recta FD bifariam dividetur in I; cùmque bifariam quoque VF dividatur in C, erunt (a) CI, VD parallelæ, a 20. adeoque erit VD ad CI ut VF ad FC; ſed VI. VF dupla eſt ipſius FC, ergo etiam recta VD, ſive æquales ipſi inclinatæ VM, MF, duplæ erunt rectæ, ſive radii CI, vel (b) ſemi- b *Def.* axis CN, ideoque inclinatarum ſumma ſemper 19 III. æqualis erit axi QN.

XXII.

Si ex quolibet puncto M *in hyperbolâ* *Apoll.* *inclinentur ad focos* F, V *rectae* MV, 51. III. MF *erit illarum differentia aequalis tranſ-* Fig.III. *verſo lateri* QN. Tab. 7.

Ductis tangentibus MD, NO, QE per centrum C, & focum V ducantur rectæ IT, DV, quæ parallelæ ſint inclinatæ FM, jungaturque EV, IV, IQ, IN.

Cùm in hyperbolâ angulus VMD ſit (c) æ- c 19. qualis angulo FMD, cui ſimiliter æqualis eſt (d) *huius*, angulus alternus MDV, erunt æquales angu- d 6. li VMD, VDM, adeoque (e) latus VM erit IV. æquale lateri VD, cùmque duo latera VM, e 19. DM in I, T bifariam dividantur (f), ſicuti III. latus VF bifariam in C dividitur, erit etiam f *Ex* DI æqualis ipſi IM. In triangulis itaque DVI, 19. VI. MVI, præter commune latus VI, duo latera VD, DI ſunt æqualia duobus lateribus VM, MI, & conſequenter (g) anguli DIV, MIV g 12. recti, & æquales erunt; cùmque ſimiliter angu- III. lus EQV rectus ſit, circulus, qui ſuper EV, veluti diametro deſcriberetur, tranſiret (h) per V, h 16. V.

a 15. V. E, I, Q, & æquales efficeret (a) angulos VEQ, VIQ, qui eidem chordæ QV inſiſtentes peripheriam in E, & I contingerent. Eodem ordine oſtenderetur circulum, qui ſuper OV veluti diametro circa rectos angulos VIO, VNO deſcriberetur, æquales angulos NIO, NVO continere, quippe qui eidem chordæ NO inſiſtentes ad peripheriam in punctis I, & V pertingerent; ſed anguli NVO, VEQ in hy-
b 17. huius. perbolâ ſunt (b) æquales, æquales igitur etiam erunt anguli VIO, QIN; cùmque angulus VIO rectus ſit, rectus quoque erit angulus QIN; adeoque, ſi ſuper tranſverſo latere QN centro C circulus deſcriberetur, tranſiret ille
c 16. V. per I (c), & rectas CI, CQ, CN, utpote ejuſdem circuli radios, æquales efficeret. Cùm denique latera VM, VF, DM in punctis I, C, T bifariam ſecta fuerint, ſitque proinde latus VM duplum lateris MT, erit etiam DV, vel ipſi æqualis inclinata VM, dupla totius IT, & recta, vel inclinata FM dupla partis CT, adeoque etiam inclinatarum FM, MV differentia dupla erit alterius partis IC, vel CQ, quæ eſt differentia medietatum IT, CT; ſed tranſverſum quoque latus QN du-
d Ax. 8. plum eſt ejuſdem CQ, ergo (d) inclinatarum FM, MV differentia tranſverſo lateri æqualis erit.

XXIII.

Si in axe parabolae CM *abſcindatur recta* CE *aequalis rectae* CX, *nempe quadranti lateris recti, ſive parametri* CF, *& ductâ quacumque lineâ* DB *axi parallelâ*

jun-

jungatur EB, *erunt aequales anguli* GBD, Fig. I.
HBE, *quos inclinatae* DB, BE *effi-* Tab. 7.
ciunt cum rectâ GH, *quae parabolam*
tangat in B.

Ductis enim ordinatâ BI, & tangente verticali LC ſibi mutuò parallelis (a), erunt IH, BH biſariam in LC diviſæ (b), adeoque recta BI dupla erit rectæ LC, & quadratum ex BI, ſive (c) rectangulum ex IC in CF, quadruplum erit quadrati (d) ex LC; ſed rectangulum quoque ex IC in CF quadruplum eſt rectanguli ex IC in CX (e), ſive rectanguli ex HC in CE, erit ergo rectangulum ex HC in CE æquale quadrato ex LC; adeoque (f) angulus HLE rectus erit, ſimiliterque rectus, & illi æqualis erit angulus BLE, cùmque proinde in triangulis BLE, HLE etiam latera BL, HL ſint æqualia, & latus LE commune, æquales etiam erunt (g) illorum baſes BE, HE, & angulus LBE erit æqualis angulo LHE, cui ſimiliter æqualis eſt (h) angulus exterior GBD, ideoque anguli GBD, LBE, quos inclinatæ cum tangente efficiunt, æquales erunt.

a *Def.* 11. *hu.* b 13. *huius.* c 4. *huius.* d 16. VI. e *Hyp.* & 4. VI. f *Ex* 30. VII. g 11. *III.* h 6. IV.

XXIV.

Cùm itaque radius quicumque DB in punctum B incidens reflecti debeat juxta Catoptricæ leges, ut angulus incidentiæ ſit æqualis angulo reflexionis, *ſemper idem radius in punctum* E *reflectetur*, quod proinde *Focus* Parabolæ, vel *Umbilicus* vocatur.

Hinc

XXV.

Hinc facilè apparet, quod *aggregatum ex quocumque radio incidente* DB *ſimul, & reflexo* BE *ſemper eſt aequale aggregato ex* MC, CE.

Semper enim IC ſimul cum CE eſt æqualis rectæ HE, vel EB, adjectiſque utrinque æqualibus rectis MI, DB, erit etiam DB cum BE æqualis ipſi MC cum CE; unde quilibet radii incidentes, & reflexi quibuslibet aliis radiis incidentibus, & reflexis æquales erunt.

XXVI.

Apoll. 1. & 14. *II.* *Conic.* Figura XIII. Tab. 7. *Si in rectâ* GE, *quae tangat hyperbolam in vertice* N, *aſſumantur aequales partes* DN, NE, *ut alterutrius quadratum ſit aequale quadranti illius rectanguli, quod fieret ex transverſo latere* QN, *& recto* NG, *ducanturque per centrum* C, *& puncta* D, E *rectae* CD, CE *ſemper illae ad hyperbolicam curvam magis accedent; nunquam tamen, etſi in infinitum protrahantur, cum illâ convenient.*

a *Ex hypoth.* Cùm etenim quadratum ex DN ſit (a) quarta pars rectanguli ex QN in NG, & ſimiliter
b 16. VI. quadratum ex CN ſit (b) quarta pars quadrati ex totâ QN, erit quadratum ex CN ad qua-
c *Ex* 2. & 7. VII. dratum ex DN, ſive (c), ordinatâ quacumque HL, quadratum ex CK ad quadratum ex
d 4. VI. KH, ut quadratum ex QN ad rectangulum ex eâdem QN in NG, ſive (d) ut latus QN ad latus

latus NG, hoc eſt (a) in hyperbolâ ut rectangulum a 5. huius.
QKN ad quadratum ex ordinatâ KM; ſed rectangulum QKN cum quadrato ex CN eſt (b) b 18. VI.
æquale quadrato ex CK, & rectangulum quoque LMH unà cum quadrato ex KM eſt æquale quadrato ex KH, ergo ſi totum quadratum ex CK eſt ad totum quadratum ex KH, ut ablata pars, rectangulum nempe QKN ad ablatam partem quadratum ex KM, reliquum etiam quadratum ex CN erit (c) ad reliquum re- c 11. I.
ctangulum LMH ut totum quadratum ex CK ad totum quadratum ex KH, hoc eſt ut idem quadratum CN ad quadratum ex ND, adeoque (d) rectangulum LMH, vel HIL erit æquale d Ax. 2. I.
quadrato ex DN; unde eadem DN media proportionalis erit inter HI, IL, aut LM, MH; cùmque hyperbolam producendo ordinata MI, multòque magis recta HI, vel LM, quæ eſt prima proportionalis, in infinitum augeri poſſit, recta IL, vel MH tertia proportionalis in infinitum decreſcere debebit, adeoque ſemper ad hyperbolicam curvam magis accedent rectæ CD, CE; quamvis autem in infinitum extendantur, nunquam cum hyperbolicâ curvâ convenient, cùm ſemper inter hyperbolicam curvam, & rectam CE, vel CD ſegmentum aliquod IL, vel HM reperiri debeat, quod cum alio HI vel LM rectangulum efficiat æquale quadrato ex DN; hinc rectæ ejuſmodi CD, CE hyperbolæ *Aſymptoti*, vel *non-Concurrentes* vocantur.

Quod

XXVII.

Apoll. 2. II. Quod ſi alia quaecumque *recta* CB, FB, CG *duceretur, aut ab aſymptoto, & hyperbolicâ curvâ ſemper illa recederet, aut tandem cum hyperbolâ conveniret.*

Nam diſtantia curvæ ab aſymptoto ita decreſcit, ut minor aliquando fiat rectâ DB (a) diſtantiâ rectæ CD, vel FB ab aſymptoto, adeoque recta CD, vel FB producta intra hyperbolam caderet, ſive hyperbolam ſecaret.

a Ex antec.

XXVIII.

Si rectum latus NG *ſit aequale tranſverſo lateri* QN, *etiam recta* DN *erit aequalis rectae* CN.

Utrumque enim quadratum ex DN, vel EN erit (b) æquale quadranti illius rectanguli, quod fieret ex tranſverſo latere QN in rectum NG, ſive (c) quadrati ex QN; adeoque quadratum ex DN eſſet æquale quadrato ex aliâ CN, & recta DN æqualis ipſi CN.

b 26. huius. c Def 5. IV.

Hyperbola, cujus parameter, vel latus rectum eſt æquale tranſverſo lateri, *Æquilatera* vocatur.

XXIX.

Aſymptoti, qui circa hyperbolam aequilateram deſcribuntur, rectum angulum continent.

Cùm etenim in hyperbolâ æquilaterâ rectæ DN, EN ſint æquales (d), & angulus DNC rectus, uterque angulus DCN, CDN ſemirectus erit (e); ſemirectus etiam eſt angulus NEC, vel ECN; adeoque totus angulus DCE rectus erit.

d Ant e Ex 16. IV.

LI-

LIBER XI.

De Conicarum Sectionum, Solidorumque, quæ ab ipſis generantur, dimenſione.

HActenus Curvas, vel Sectiones conicas, lineas etiam, & angulos, qui intra Curvas, ſive Sectiones ejuſmodi deſcribuntur contemplatus, ſuperficiem, ſive figuram, quæ a curvis ipſis continetur, ita nunc exponere aggrediar, ut illius dimenſio, eâ ſaltèm ratione, quâ hactenus inveniri potuit, oſtendatur. Atque, ut uberior, & perfectior hæc altera doctrinæ conicæ pars foret, Corporum quoque, ſive Solidorum, quæ a conicis ſectionibus circa proprium axim revolutis producuntur, molem, ac dimenſionem exhibui, eaque inter ſe mutuò comparavi, ut plura proinde ex nobiliſſimis Archimedis, Torricellii, aliorumque inventis hoc libro conjuncta demonſtraverim.

PRO-

PROPOSITIONES.

I.

SI circa eundem axim A B *fuerit parabola* ABC, *cujus latus rectum* B D, Figura VI. Tab.6. *atque parabola* A B H, *cujus latus rectum* B X, *ſumaturque inter* B D, B X *media proportionalis* B Z, *erit parabola* A B C *ad parabolam* A B H *ut recta* B D *ad* B Z.

Quia quadratum ex ordinatâ quacumque AC
a 4. X. eſt (a) æquale rectangulo ex AB in BD, & quadratum ex A H eſt æquale rectangulo ex A B in B X, erit quadratum ex A C ad quadratum
b 4. VI. ex AH ut eadem rectangula, hoc eſt (b) ut latus B D ad latus B X, ſed etiam quadratum ex
c 8. VII. B D ad quadratum ex B Z eſt (c) ut BD ad BX, ergo quadratum ex A C ad quadratum ex A H erit ut quadratum ex B D ad quadratum ex
d 9. VII. B Z, ideoque (d) recta A C ad A H erit ut B D ad B Z, quod cùm in ſingulis rectis ad eundem communem axim in utrâque hyperbolâ ordinatis verificetur, erit parabola A B C ad parabolam A B H ut recta B D ad B Z.

II.

Itaque *ad datum axim deſcribi poterit parabola, quae ad datam parabolam ſit in datâ ratione* B D *ad* B Z

Si

Si recta BX, quæ tertia proportionalis ſit poſt BD, BZ, aſſumatur veluti latus rectum novæ parabolæ.

III.

Si circa eundem axim CB, *eodemque tranſverſo latere* AB *deſcribatur hyperbola* CBD, *cujus rectum latus* BE, *atque hyperbola* CBM, *cujus rectum latus* BV, *ponaturque inter* BE, BV *media proportionalis* BZ, *erit hyperbola* CBD *ad hyperbolam* CBM *ut recta* BE *ad rectam* BZ. Figura VII. Tab. 7.

Ut AB ad BE ita rectangulum ACB ad quadratum CD (a); atque ut eadem AB ad BV ita idem rectangulum ACB ad quadratum ex CM, ergo (b) ut BE ad BV ita quadratum ex CD ad quadratum ex CM; ſed ut BE ad BV ita quadratum ex BE ad quadratum ex BZ (c), ergo quadratum ex CD erit ad quadratum ex CM ut quadratum ex EB ad quadratum ex BZ, adeoque (d) recta CD ad CM ut BE ad BZ; atque ita ſemper, ergo (e) hyperbolæ erunt inter ſe ut BE ad BZ.

a 5. X.
b 4. VI.
c 8. VII.
d 9. VII.
e 9. I.

IV.

Eodem ordine oſtenderetur, quod *ſi utraque hyperbola circa eundem axim, eodemque latere recto* BE, *ſed inaequalibus tranſverſis* AB, OB, *deſcriberetur, eſſent hyperbolae inter ſe ut* AB *ad* XB.

Hinc

V.

Hinc *datâ hyperbolâ, & alterutro latere, ſive recto, ſive tranſverſo, deſcribi poteſt circa eundem axim hyperbola, quæ ad hyperbolam datam ſit in ratione propoſitâ* B E *ad* B Z, *ſive* A B *ad* X B

Si tertia proportionali B O veluti tranſverſo, ſive rectâ B V veluti recto latere nova hyperbola deſcribatur.

VI.

Fig.IV. *Quod in hyperbolâ oſtenſum eſt, in ellipſi quoque eâdem ratione verificatur.*

VII.

Arch *Parabola circumſcripti ſibi rectanguli*
17. & ſubſeſquialtera eſt.
24. de Per quodlibet punctum E ducatur ordinata
Quadr. E F ſecans parabolam in I, atque per I re-
Para. cta G L axi parallela ſecans ſubtenſam, ſive
Fig. V trianguli latus A B in K. Ex rectangulo D C
Tab. 7. circa tangentem B D revoluto gignitur cylindrus, ſimiliterque conus ex triangulo A D B circa tangentem ipſam B D revoluto. Cùm er-
a 1. go quadratum ex A C ſit (a) ad quadratum
huius. ex E I, vel quadratum ex D B ad quadratum
b 2.& ex BL, ſive (b) quadratum ex AD, vel LG ad
& 7. quadratum ex L K ut recta C B ad B E, vel
VII. GL ad LI, erit (c) circulus ex radio LG in cy-
c *Ex* lindro ad circulum ex radio L K in cono ut
11.VII. recta G L in rectangulo A B ad rectam L I in trilineo parabolico A I B D: atque ita ſemper ergo cylindrus erit ad conum ut rectangulum

ad

at trilineum, ſed cylindrus triplus eſt (a) coni, a 10.
ergo rectangulum quoque triplum erit trilinei, IX.
ideoque rectangulum inſcriptæ ſibi parabolæ ſeſquialterum erit, hoc eſt erit ad ipſum ut 3 ad 2.

VIII.

Si in parabolâ ABC ducatur IE parallela baſi AC, erit parabola ABC ad parabolam, ſive portionem IBE ut cubus ex AC ad cubum ex IE, nimirum in triplicatâ ratione baſium.

Rectangulum AB ad rectangulum IB eſt (b) b 1. *II.*
in ratione compoſitâ ex ratione rectanguli AB
ad rectangulum GB, hoc eſt (c) baſis AC ad c 1.
GC, ſive IE, & ex ratione rectanguli GB ad VI.
rectangulum IB, hoc eſt (d), altitudinis CB ad BE; d 4.
ſed in parabolâ ratio altitudinis CB ad BE VI.
duplicata eſt rationis baſium AC, IE (e), ergo e 1. X.
ratio rectanguli AB ad IB, ſive (f) parabolæ f *Ant.*
ABC ad IBE, componitur ex ſimplici, & ex
duplicatâ ratione baſis AC ad IE, adeoque
triplicata erit ejuſdem rationis, ſive (g) eadem g *Ex*
ac ratio cubi ex AC ad cubum ex IE. 31. *IX.*

IX.

Circulus ad ellipſim ſuper eodem axi, vel diametro deſcriptam eſt ut major axis ellipſis ad minorem, ſive ut quadratum ex majori axe in rectangulum majoris axis in minorem. *Arch. 5. & 6. Conoid.* Figur. VII.

Cùm etenim ſemper rectangulum ex AB in
BC, ſive ipſi æquale (h) quadratum ex BD, fit h 31. VII.

 ad

ad quadratum ex BE, ut rectangulum ex AF, FC, ſive ipſi æquale quadratum ex FG
a 3.X ad quadratum ex FH (a) ſemper erit (b) latus DB
b 9. VII. ad latus EB ut latus GF ad latus HF, adeoque circulus ad ellipſim erit ut GF ad HF,
c 4. VI. vel GI ad HK, ſive (c) rectangulum ex GI in AC, hoc eſt, quadratum ex AC, ad rectangulum ex AC in AK.

X.

Arch. 7. Con *Ellipſes quæcumque erunt inter ſe ut rectangula ex axibus.*

Intelligantur enim circuli ellipſibus circumſcripti, eritque prima ellipſis ad primum circulum ſibi circumſcriptum ut rectangulum ex ſuis axibus ad quadratum ex axe majori, vel
d *Ant.* diametro circuli (d); circulus autem primus ellipſi circumſcriptus erit ad ſecundum circulum ſecundæ ellipſi circumſcriptum ut idem quadratum axis in primâ ellipſi ad quadratum
e 11. *VII.* majoris axis in ſecundâ (e); denique ſecundus circulus erit ad inſcriptam ſibi ſecundam ellipſim ut quadratum majoris axis ad rectangulum ex utroque axe, ergo ex æquo prima ellipſis ad ſecundam erit ut rectangulum ex axibus primæ ad rectangulum ex axibus ſecundæ.

XI.

Apoll. 4. II. *Intra datas aſymptotos* TC, SC *per datum punctum* N, *vel* I *hyperbolicam curvam deſcribere.*

Bifariam dividatur angulus TCS rectâ CX, atque primò punctum N reperiatur in rectâ CX. Extendatur NC, ponaturque CQ æqualis

lis ipſi CN, atque poſt CN, & ordinatam ND ponatur tertia proportionalis NB, cujus dupla ſit recta NG, aſſumptoque in rectâ CX puncto quolibet K fiat ut QN ad NG ita rectangulum QKN ad quadratum ex ordinatâ KI, atque ita ſemper, eritque, ut apparet (a) curva, quæ per N, & omnia puncta I tranſeat, hyperbola, cujus rectum latus NG tranſverſum QN. Quod verò rectæ TC, SC ſint ejuſdem hyperbolæ aſymptoti facilè demonſtratur; rectangulum enim ex CN in NB, ſive ipſi æquale (b) quadratum ex ND, eſt æquale quadranti illius rectanguli, quod a tranſverſo latere QN, rectoque NG continetur. a Ex 5. X. b 13. VI.

Si verò punctum I ſit extra rectam CX ducatur per I recta HL perpendicularis ad CX, atque inter partes HI, IL ponatur media proportionalis KZ, vel æqualis ipſi NE, ND, quæ ſimiliter ſit perpendicularis ad CX, poſitâque QC æquali ipſi CN, fiat ut rectangulum QKN ad quadratum ex KI ita QN ad NG, & ut QN ad NG ita rectangulum QXN ad quadratum ex XR, atque ita ſemper, eritque curva, quæ per puncta N, I, R tranſibit, hyperbola. Quod TC, SC ſint aſymptoti demonſtratur. Ponatur NB tertia proportionalis poſt CN, ND.

Quia quadratum ex NE eſt æquale rectangulo HIL, erit quadratum ex CN ad rectangulum HIL, ut quadratum ex CN ad quadratum ex NE, ſed ut quadratum CN ad quadratum NE ita quadratum ex CK ad quadratum ex KL, ergo (c) etiam reliquum rectangulum QKN erit ad quadratum reliquum ex KI, hoc eſt recta QN ad NG, ut quadratum c Ex 18. VI.

a 8. VII. ex CN ad quadratum ex ND, ſive (a) ut recta CN ad NB, adeoque, ſicuti recta QN dupla eſt rectæ CN, ita recta NG dupla erit rectæ NB; ergò rectangulum ex CN in NB,
b 13. VI. ſive æquale ipſi (b) quadratum ex ND erit æquale quadranti rectanguli ex QN in NG,
c Ex 26. X. adeoque (c) rectæ TC, SC erunt aſymptoti hyperbolæ ANB.

XII.

Apoll. 8. II. *Si per duo quolibet hyperbolae puncta* P, I, *ducatur recta* TV *ſecans aſymptotos in* T, V, *rectae* TP, IV *inter aſymptotos, & hyperbolicam curvam interceptae aequales erunt.*

Per puncta P, & I ordinentur uſque ad aſymptotos perpendiculares ad axim, & inter ſe parallelæ rectæ OS, HL.

Cùm itaque rectangulum ex OP in PS ad
d Ex 10. VI. rectangulum ex HI in IL ſit (d) in ratione compoſitâ ex ratione primi lateris OP ad primum latus HI, & ex ratione ſecundi lateris PS ad ſecundum latus IL, & rectangulum quoque ex TP in PV ad rectangulum ex TI in IV ſit in ratione compoſitâ ex ratione pri-
e 2. VII. mi lateris TP ad primum latus TI, hoc eſt (e) ipſius OP ad HI, & ex ratione ſecundi lateris PV ad ſecundum latus IV, hoc eſt
f 2. II. ipſius PS ad IL, erit (f) rectangulum TPV ad rectangulum TIV, ut rectangulum OPS ad rectangulum HIL, permutandoque rectangulum TPV ad rectangulum OPS ut rectangulum TIV ad rectangulum HIL, ſed rectangulum

OPS

OPS, ob aſymptotos, ſemper eſt (a) æquale rectangulo HIL, ergo rectangulum quoque TPV erit æquale rectangulo TIV, adeoque rectæ TP, IV inter aſymptotos, & hyperbolicam curvam interceptæ æquales erunt. a *Ex* 26. *X.*

XIII.

Inter duas extremas lineas AB, AC *inæquales duas medias proportionales reperire.* Fig. X.

Diſponantur illæ ut rectum angulum contineant CAB, qui biſariam dividatur a rectâ AG; completoque rectangulo BACD, circa ipſum, vel ſupra diametrum AD deſcribatur circulus ABDC; & per punctum D inter aſymptotos AB, AC deſcribatur (b) hyperbola IGF. Quoniam, ob inæquales rectas AB, AC (c), aut ob inæquales angulos BAD, CAD, punctum D extra verticem, aut diametrum hyperbolæ reperitur, erit hyperbolæ vertex intra diametrum AG, & proximior centro A, quàm ſit aliud punctum D hyperbolæ, adeoque vertex hyperbolæ intra circulum CAB reperietur, & conſequenter circulus ipſe ſecabitur ab hyperbolâ in alio puncto E. Ducatur ergo per D, E recta HK utramque aſymptoton ſecans in H, & K. b 11. *huius.* c *Ex hypoth.*

Cùm itaque rectæ HE, DK inter aſymptotos, & hyperbolam interceptæ æquales ſint (d), additâque communi parte ED, rectæ quoque HD, EK ſint æquales, erit rectangulum ex DH in HE æquale rectangulo ex EK in KD; ſed rectangulum ex EK in KD eſt æquale rectangulo ex AK in KB (e); & re- d *Ant.* e 27. *VII.*

ctangulum ex DH in HE eſt æquale rectangulo ex AH in HC, ergo rectangulum ex AK in KB erit æquale rectangulo ex AH
a 19. VI. in HC; adeoque (a) erunt illorum latera reciprocè proportionalia, hoc eſt KA ad AH, ut HC ad KB; ſed, ob AK, & CD parallelas,
b 2. VII. ut KA ad AH, ita eſt (b) DC ad CH, ergo DC, vel BA ad CH, ita eadem CH ad
c Ex ead. KB; ſed ut DC ad CH, ita etiam eſt (c) KB ad BD, vel AC, ergo ut BA ad CH, ita CH ad KB, & KB ad AC; adeoque quatuor AB, CH, KB, AC continuè proportionales erunt.

XIV.

Figura IX. *Si ad quodlibet hyperbolae* ABC *punctum* D *ducatur tangens* EF *ſecans utramque aſymptotum in* E, F, *erunt* ED, DF *inter aſymptotos, & punctum contactûs poſitae aequales.*

Per quodlibet punctum G, vel I ducatur recta GH, IK tangenti EF parallela, erunt-
d 12. huius. que ſemper (d) interceptæ IP, RK, ſive GN, MH inter ſe æquales, & quò propior eſt parallela GH tangenti EF eò interceptæ GN, MH ad æqualitatem cum interceptis ED, DF propiùs accedent, ergo quemadmodum ſemper interceptæ ejuſmodi ſunt æquales, etiam rectæ ED, DF, in quas illæ deſinunt, æquales erunt.

Sive, ſi alterutra ED major eſſet aliâ DF, aſſumi poſſet aliqua EV, quæ minor eſſet ipsâ ED, & æqualis ipſi DF, extensâque per punctum V rectâ VN aſymptoto parallelâ duci poſſet per punctum N recta GH tangenti EF

pa-

parallela; eritque GN, vel (a) MH ipſi EV, a 12.
vel DF æqualis, quod repugnat (b). *huius.*

XV. b 26. X.

Iiſdem, ut antea poſitis, ſi per punctum D *ducatur ex centro* O *recta quæcumque* OQ, *haec biſariam dividet in* L, X *rectas omnes* NM, PR, *quæ intra* Figura IX. *hyperbolam tangenti* EF *parallelae ducantur.*

Extendantur NM, PR, uſque ad aſymptotos; eritque in triangulis GOL, LOH (c), GL ad c 1.& 2. VII. ED ut LO ad OD, ſive ut LH ad DF; permutandoque GL ad LH ut ED ad DF; ſed ED æqualis eſt (d) ipſi DF, ergo etiam GL d *Ex hypoth.* æqualis erit ipſi LH; ablatis itaque æqualibus partibus (e) GN, MH, etiam reliqua NL æqualis erit reliquæ LM, eâdemque ratione oſtendetur etiam PX, XR æquales eſſe. e *Ex* 12. *hu.*

XVI.

Etiam *ſegmentum hyperbolicum* NDM, *ſive* PNDMR *biſariam a rectâ* OQ *dividetur.*

Cùm etenim ſegmentum ejuſmodi rectis lineis componatur, quæ tangenti ED, vel interceptæ, aut baſi NM, ſive PR parallelæ ducantur, quemadmodum ſingulæ ex his parallelis biſariam a rectâ OQ dividuntur (f), etiam f *Ant.* omnes ſimul ſumptæ, ſive ſegmentum hyperbolicum ipſis æquale biſariam dividetur.

XVII.

Ergo, ſi ex rectilineis trapeziis IEDX, XDFK æqualibus æquales portiones hyperbolicæ FNDX, XDMR auferantur, relinquetur *trapezium hyperbolicum* IEDNP *æquale trapezio hyperbolico* RMDFK.

XVIII.

Apoll. 12. II. Figura VIII. *Si ex quibuslibet hyperbolae* ABC *punctis* D, E *ducantur rectae* EF, EG; DH, DI *aſymptotis parallelae, erunt rectangula* DHOI, EGOF *ab ejuſmodi parallelis, & aſymptotis conſtituta, ſive inter aſymptotos, & hyperbolam intercepta inter ſe aequalia.*

Extendatur per eadem puncta D, E uſque
a 12. huius. ad aſymptotos recta KL, eruntque (a) interceptæ KD, EL inter ſe æquales, additoque communi ſegmento DE, etiam recta EK erit æqualis rectæ DL, ideoque erit EK ad KD ut DL ad LE; ſed ut EK ad KD ita EF
b 2. VII. ad DH (b); atque ut DL ad LE ita DI ad EG, adeoque (c) rectangulum ex extremis EF,
c 12. VI. EG, nempe rectangulum EO, erit æquale rectangulo ex intermediis DH, DI, nempe rectangulo DO.

Quod ſi parallelogramma DHOI, NMOP ſint ex eâdem parte, ſimiliter æqualia erunt inter ſe. Oſtendetur enim, ut antea, parallelogrammum EO æquale tam parallelogrammo NO, quàm parallelogrammo DO; ideoque pa-

parallelogramma DO, NO æqualia erunt inter ſe, eritque (a) OH ad OM ut OP ad OI, a 12.
ſive MN ad HD. VI.

XIX.

Si in aſymptoto AB *ſumantur tres rectae* AB, AD, AC *continuè proportionales, & ex punctis* C, D, B *ducantur rectae* CE, DF, BL *alteri aſymptoto parallelae, trapezia hyperbolica* CDFE, DBGF *erunt aequalia.* Figura IV.

Per puncta G, F, E agantur rectæ GI, FK, HL aſymptoto AB parallelæ; jungaturque AN, NF, FL, EG. Quia rectangula HACE, KADF ſunt (b) æqualia, erunt b *Ant.*
illorum latera reciprocè proportionalia; hoc eſt HA ad AK ut DA ad AC; ſed ut DA ad AC ita eſt (c) etiam BA ad AD, ergo ut c *Hyp.*
HA ad AK ita erit BA ad AD; permutandoque ut HA ad AB, ita KA ad AD, adeoque (d) rectangula HABL, KADF ſimilia d *Ex*
erunt, & (e) circa eandem diametrum conſtituta. 5. VII.
Similiter quia rectangula IABG, HACE æ- e 4.
qualia ſunt, erunt illorum latera reciprocè VII.
proportionalia, hoc eſt HA ad AI ut BA ad AC, permutandoque HA ad AB ut IA ad AC: unde ſimiliter rectangula HABL, IACN ſimilia erunt, & circa eandem diametrum conſtituta, ideoque rectæ AN, NF, FL unicam diametrum, & lineam rectam efficiunt AL, quæ cùm bifariam dividat rectam EG diametrum rectanguli EG, & ordinatam in hyperbolico ſegmento EFG, bifariam

quo-

quoque dividet hyperbolam ipſam EFG; un-
a 5. de, ſi ab æqualibus (a) triangulis EAM,
VI. GAM, ſemihyperbolæ æquales EFM, GFM auferantur, reliqua etiam ſpatia, ſive triangula hyperbolica EAF, GAF æqualia erunt; cùmque triangula quoque EAC, FAD, utpote æqualium parallelogrammorum dimidia, æqualia ſint, ablato communi triangulo NAC reliquum triangulum EAN erit æquale reliquo trapezio NCDF; adjectoque communi triangulo hyperbolico ENF, erit triangulum hyperbolicum EAF æquale trapezio hyperbolico ECDF; cùmque ſimiliter triangula BAG, DAF æqualia ſint, ablato communi triangulo OAD, additoque communi triangulo hyperbolico FOG, erit triangulum hyperbolicum GAF æquale trapezio hyperbolico FDBG; ſed triangula hyperbolica, ſive ſectores FAG, FAE æqualia ſunt inter ſe, ergo trapezia quoque hyperbolica ECDF, FDBG inter ſe æqualia erunt.

XX.

Si in aſymptoto AE *fuerit* AB *ad* AC *ut* AD *ad* AE, *ducanturque* BF, CG, DH, EI *alteri aſymptoto* AK
Figura *parallelae, trapezia hyperbolica* BFGC,
XI. DHIE *erunt aequalia.*

Inter AC, AD ponatur media proportio-
b 13. nalis AM, cujus proinde (b) quadratum erit
VI. æquale rectangulo ex AC in AD, ſed, ob quatuor continuè proportionales AB, AC, AD, AE, etiam rectangulum ex AB in

AE

AE eſt (a) æquale rectangulo ex AC in AD, a 12.
ergo idem quadratum ex AM erit æquale VI.
rectangulo ex AB in AE, adeoque recta AM
media proportionalis erit etiam inter extremas
AB, AE. Cùm itaque AB, AM, AE ſint in
continuâ proportione, trapezia BFNM, MNIE
erunt æqualia, ſed etiam ablata trapezia CGNM,
MNHD ſunt (b) æqualia, ergo ſimiliter æqualia b Ant.
quoque erunt reliqua trapezia BFGC, DHIE,

XXI.

Itaque *trapezium aliquod hyperbolicum* BFIE *biſariam dividetur*

Si inter extremas AB, AE media proportionalis AM inveniatur; tunc enim erectâ MN trapezia hyperbolica BFNM, MNIE æqualia ſemper forent; ſicuti, ut trapezium ipſum trifariam dividatur, inter eaſdem extremas duæ mediæ inveniri deberent; atque ita deinceps.

XXII.

Quod ſi AB, AC, AM, &c. ſumerentur in eâdem continuâ proportione, *ſpatia hyperbolica* BFGC, CGNM, *&c. ſemper aequalia forent;* unde quemadmodum in infinitâ aſymptoto AE poſſet eadem linearum proportio in infinitum continuari, ita quoque *hyperbolicum ſpatium quodcumque* BFGC *in infinitum multiplicari poſſet*, hoc eſt infinita ſpatia aſſumi, quæ eidem ſpatio BFGC ſemper æqualia forent; quod in hyperbolicis etiam triangulis, ſive ſectoribus,

quos anteà trapeziis ipſis æquales oſtendimus, verificatur.

XXIII.

Spatium ergo, quod ab aſymptoto, & hyperbolicâ curvâ continetur, eſt abſolutè infinitum.

Poteſt enim in illo aſſignari ſpatium, quod cujuslibet ſpatii, ſive trapezii dati, quantumvis multiplex ſit; ſive quod ſuperet ſemper, & excedat quamcumque propoſitam magnitudinem quantumcumque multiplicem trapezii dati.

XXIV.

Si eodem ſemiparametro, vel ſemilatere recto HA, *quo deſcripta fuerit hyperbola aequilatera* ACD, *deſcribatur etiam parabola* AEF, *& per quodlibet hyperbolae punctum* D *ducatur* FG *axi parallela ſecans hyperbolam ipſam in* D, *parabolam in* F, *& rectam* HG, *quae ex hyperbolae centro* H *perpendicularis ad axim, vel ordinatis parallela, ducatur, in* G; *dico ſpatium, ſive trapezium* Figura XV. *hyperbolicum* AHGD *eſſe aequale rectangulo ex ſemiparametro* HA *in curvam parabolicam* AEF.

Ad datum parabolæ punctum F ducatur tangens FI (a); & in illâ aſſumatur indefinitè parva particula FO, quæ pro particulâ curvæ paraboli-

a 9. X.

bolicæ ſimiliter indefinitè parvâ ſumi poſſit; tum ducatur per punctum O recta N M axi parallela, ordinatiſque per puncta D, F rectis D V, F P, erigatur in F tangenti perpendicularis, vel normalis F Q.

Cùm in hyperbolâ æquilaterâ rectangulum ex X V in V A ſit (a) æquale quadrato ex ordinatâ V D, vel H G, addito communi quadrato ex H A, erit rectangulum X V A unà cum quadrato ex H A, hoc eſt (b) quadratum ex H V, æquale quadrato ex H G, & ex H A; hoc eſt (c) quadrato ex A G; adeoque recta H V erit æqualis rectæ A G; ſed recta A G ſemper eſt æqualis normali Q F (ſemper enim in triangulis rectangulis Q P F, A H G ſubnormalis P Q æqualis eſt (d) parabolæ ſemiparametro A H, & reliquum latus P F æquale eſt (e) reliquo lateri H G, adeoque etiam recta A G eſt (f) æqualis rectæ Q F) ergo ſimiliter recta H V, vel G D erit æqualis normali Q F.

a Ex 5. X.
b 18. VI.
c 33. VII.
d 9. X.
e 10. IV.
f 11. III.

Deinde cùm in triangulo rectangulo QPF, anguli PQF, P F Q æquales ſint uni recto, ut angulo Q F I, ablato communi angulo P F Q reliquus etiam angulus P Q F erit æqualis reliquo angulo N F O; adeoque (g) triangula rectangula Q P F, N F O ſimilia erunt, eorumque latera proportionalia, hoc eſt F Q ad Q P ut O F ad F N; unde rectangulum ex extremis Q F, F N erit æquale rectangulo ex intermediis Q P, O F; ſed, ob æqualia latera, rectangulum ex Q F in F N eſt æquale rectangulo ex G D in D R, ſive ſpatio hyperbolico G D C M; & rectangulum ex Q P in O F eſt æquale rectangulo ex ſemiparametro H A in curvæ parabolicæ

g 1. VII.

par-

particulam EF, atque ita ſemper, ergo totum ſpatium hyperbolicum AHGD erit æquale rectangulo ex ſemiparametro HA in totam parabolicam curvam AEF.

XXV.

Arch. 23.Con. Fig. V. *Solidum, ſive conoides parabolicum genitum ex revolutione parabolae* ABC *circa axim* DB *dimidium eſt cylindri ſibi circumſcripti geniti ex revolutione rectanguli* AB *circa eundem axim*.

Ductâ enim per quodlibet axis punctum E ordinatâ EF per punctum O, & I, in quibus parabola, & inſcriptum triangulum ſecatur ab ordinatâ EF, ducatur recta LG, axi parallela. Cum itaque circulus a radio EF deſcriptus in cylindro ad circulum ex radio EI deſcriptum in conoide ſit ut quadratum ex EF, vel CA ad quadratum ex EI, hoc eſt, ut recta CB ad BE, vel AC, ſive FE ad EO, circulus ex EF in cylindro ſemper erit ad circulum ex EI in conoide ut recta EF in rectangulo AB ad rectam EO in triangulo ABC, adeoque cylindrus erit ad conoidem ut rectangulum ad triangulum, cùmque triangulum dimidium ſit rectanguli, conoides quoque cylindri ſibi circumſcripti dimidium erit.

XXVI.

Arch. 26.Con. *Si conoides parabolicum genitum a parabolâ* ABC *ſecetur circulo baſi parallelo, erit conoides integrum ad portionem, ſive*

ſive conoidem ex IBE *ut quadratum integri axis* CB *ad quadratum ex axi* BE.

Cylindrus enim ex rectangulo AB erit (a) ad cylindrum ex rectangulo IB in ratione compoſitâ baſium, & altitudinum, ſed ratio baſium, hoc eſt circulorum ex radiis CA, & EI, eſt (b) eadem ac ratio altitudinum, ergo ratio cylindri ad cylindrum, ſive (c) conoidis ad conoidem ex his compoſita, duplicata erit rationis axium, hoc eſt erunt conoides ipſi ut axium quadrata.

a 30. IX. b 1. X. c *Ant.*

XXVII.

Si circulus, & ellipſis circa eundem axim revolvantur, erit ſphaera genita ex circulo ad ſphaeroidem genitum ex ellipſi ut quadratum majoris axis CA *ad quadratum minoris* HK.

Figura VII.

Cùm etenim ſemper quadratum ex DB ſit ad quadratum ex BE ut quadratum ex FG ad quadratum ex FH (d) erit (e) etiam ſemper circulus ex radio BD deſcriptus in ſphærâ ad circulum ex radio BE deſcriptum in ſphæroide, ut circulus ex FG in ſphærâ ad circulum ex FH in ſphæroide, unde omnes circuli in ſphærâ ad omnes circulos in ſphæroide, hoc eſt ſphæra ad ſphæroidem erit ut circulus, ſive quadratum ex FG ad circulum, ſive quadratum ex FH, ſive (f) ut quadratum ex GI, vel axe majori CA, ad quadratum ex minori HK.

d *Ex* 10. *hui.* e 11. VII. f 16. VI.

XXVIII.

Si ad quemlibet axim DB, *tranſverſumque latus* BE *deſcripta ſit hyperbola* ABC, *cujus rectum latus* BX *ſit tranſverſi duplum, deſcribaturque radio* DE *circulus* FHDG, *in quo ordinetur* HG, *dico conoides hyperbolicum genitum ab hyperbolâ circa* BD *revolutâ ſemper ae-*
Figura XII. *quale fore ſegmento ſphaerico, quod gignitur a circulari ſegmento* GDH *circa eundem axim revoluto.*

Aſſumpto quolibet puncto I ordinetur in hyperbolâ recta LK, deſcribaturque circulus MIN. Cùm itaque tranſverſum latus EB
a Ex 5. X. ſubduplum ſit recti lateris BX, erit (a) etiam rectangulum EDB dimidium quadrati ex AD,
b Ex 29. VII. & 13. VI. adeoque rectangulum FDB, ſive (b) quadratum ex DH, æquale quadrato ex AD, & circulus ex radio DH, vel ipſi æqualis ſphærica ſuperficies deſcripta ab arcu HD (c) erit æqua-
c 38. VIII. lis circulo ex radio AD in conoide. Eodem ordine demonſtrabitur rectangulum EIB ſubduplum eſſe quadrati ex IL, adeoque rectangulum OIB, ſive quadratum ex IM, eſſe æquale quadrato ex IL, ſive circulum ex radio IM, vel ſphæricam ſuperficiem ex arcu IM æqualem circulo conoidis ex radio IL, atque ita ſemper, ergo omnes ſimul ſphæricæ ſuperficies, ſive ſegmentum ſphæricum, erit æquale omnibus circulis in conoide, ſive ipſi conoidi.

Eo-

XXIX.

Eodem ordine oſtendi poſſet *conoidem* LBK *aequalem eſſe ſegmento ſphaerico, quod deſcribitur a circulari ſegmento* MIN.

XXX.

Hinc cùm nota ſit ratio ſegmentorum *exponi poterit ratio inter conoidem hyperbolicum integrum, ejuſque portionem, ſive conoidem* LBK.

XXXI.

Si recta ZE *dimidia ſit tranſverſi lateris* EB, *&* QF *aequalis ipſi* ED, *Arch. 27. Con.* *vel* EF, *dico quod conoides ex hyperbolâ æquilaterâ* ABC *ad inſcriptum ſibi conum erit ut* ZD *ad* DE.

Segmentum ſphæricum HDG (a), ſive ipſi a 41. æqualis conoides hyperbolicus (b) eſt ad conum IX. HDG, ut QB ad BF, & conus HDG ad b 28. conum æquè altum ABC eſt (c) ut circulus ex *huius*. radio HB ad circulum ex radio AD, vel c 6. DH, hoc eſt ut quadratum ex HB ad qua- IX. dratum ex HD, ſive (d) rectangulum FBD ad d 30. rectangulum FDB, ſive (e) ut FB ad FD, er- & 29. go ex æquo conoides hyperbolicus ad inſcri- VII. ptum ſibi conum erit ut QB ad FD, vel e 4. ut dimidium ipſius QB ad dimidium ipſius VI. FD, ſed DZ eſt dimidium rectæ QB, (eſt enim ED dimidium rectæ QE (f), & EZ dimi- f *Hyp.* dium rectæ EB (g),) & radius ED eſt dimi- g *Hyp.* dium rectæ FD, ergo conoides ad inſcriptum ſibi conum erit ut ZD ad DE.

XXXII.

Cùmque conoides omnes circa eundem
a Ex 3. hui. b 6. XI. axim, eodem latere BE deſcripti ſint (a) ut quadrata ordinatarum, hoc eſt (b) ut coni ipſi inſcripti, permutando *quilibet conoides ad inſcriptum conum erit ut* conoides ABC ad ſuum conum, ſive ut ZD *ad* DE.

XXXIII.

Figura VI. *Si circa hyperbolam aequilateram* EDV *deſcribantur aſymptoti* AB, AC *rectum*
c 29. X. *angulum continentes* (c), *ducanturque* DG, DH *aſymptotis parallelae, ſolidum hyperbolicum infinitè longum genitum ex revolutione infiniti ſpatii hyperbolici* BGDF *circa aſymptotum* AB *erit aequale cylindro, qui gignitur ex revolutione re-*
d Ex 28. X. *ctanguli, ſive quadrati* (d) HDGA.

Ducatur enim per quodlibet punctum M recta NE aſymptoto AB parallela. Quia in ae-
e 18. huius. qualibus (e) rectangulis HDGA, NEIA latera ſunt (f) reciprocè proportionalia, erit ut
f 12. VI. IA ad AG, vel ut EN ad NM, vel HD, ita HA ad AN, vel (g) eadem HD, aut NM
g 2. VII. ad NK; ſed ut EN ad NM ita rectangulum ex EN in peripheriam circuli, qui deſcriberetur a radio AN, ad rectangulum ex
h 4. VI. MN in eandem peripheriam ex radio AN (h), hoc eſt ut cylindrica ſuperficies, quae deſcribitur a rectâ EN circa aſymptotum AB revolutâ ad cylindricam ſuperficiem, quae deſcribitur a rectâ NM circa eandem aſympto-

tum

tum revolutâ, ergo ut cylindrica ſuperficies ex EN ad cylindricam ſuperficiem ex NM ita erit MN ad NK; cùmque id ſemper verificetur, erunt omnes cylindricæ ſuperficies, ex quibus componitur ſolidum hyperbolicum, ad omnes cylindricas ſuperficies, quibus cylindrus ipſe componitur, ut omnes rectæ, quibus componitur rectangulum HDGA, ad omnes rectas, quibus componitur triangulum HDA; hoc eſt hyperbolicum ſolidum erit ad cylindrum, ut rectangulum ad triangulum, ſed rectangulum duplum eſt trianguli, ergo ſolidum quoque hyperbolicum duplum erit cylindri, adeoque dividendo ſolidum genitum ex hyperbolico ſpatio infinito BGDF erit æquale ſubjecto cylindro genito ex quadrato HDGA circa eandem aſymptotum revoluto.

Sive breviùs. Cylindricæ ſuperficies ex rectangulis AE, AD circa aſymptotum AB revolutis ſunt ut rectangula ipſa (a), hoc eſt (b) æquales; ſed cylindrica ſuperficies ex rectangulo AD ad circulum baſis ex radio AH, vel NM, eſt (c) ut HD, vel AH ad dimidium ipſius AH, hoc eſt dupla, ergo quælibet cylindrica ſuperficies ex latere NE dupla erit circuli correſpondentis ex radio NM, atque ita ſemper, ergo omnes cylindricæ ſuperficies, ſive rotundum ſolidum infinitum ex ſpatio BAHDEF duplum erit omnium circulorum, nempe cylindri ex quadrato AD circa aſymptotum AC revoluto, & dividendo ſolidum hyperbolicum infinitum ex ſpatio BGDF erit æquale cylindro ex quadrato AD circa aſymptotum AC, vel AB revoluto.

a *Ex* 22.*VIII.*
b 18. *huius.*
c 19. VIII.

LIBER XII.

De variis Curvarum, Solidorumque generibus.

Supremo denique hoc loco varia Curvarum genera, Solidorumque, quæ ab illarum revolutione producuntur, Evolutas nimirum, Cycloidem, Logiſticam, Spiralem, Ciſſoidem, Conchoidem, & Caſſinoïdem contemplabor. Non quòd innumeræ Curvarum ſpecies aliæ conſiderari non poſſent, cùm ferax adeo ſit Geometriæ campus, ut maxima prorſus illarum varietas, & admirabiles paſſiones, atque accidentia animum mirificè delectet, atque incredibili voluptate exerceat; verùm quòd propoſita brevitas, atque Elementorum ratio vix patiebatur, ut omnia complecterer; præſertim quæ a præſtantiſſimis viris, qui Geometriam nuperrimè illuſtrarunt, feliciter inventa, ac demonſtrata ſunt. Paucas itaque ex illis ſelegi, tum quòd in Phyſicis illarum cognitio ſit uſui futura, tum quòd ex novo plerumque modo, quo hæc demonſtrari ſolent, Adoleſcentium ingeniis fax veluti quædam proponatur, quâ ſe li-

liberè in aliis ejuſmodi Curvarum generibus inveſtigandis exerceant. Quod verò ad Curvarum originem ſpectat, hanc in Hiſtoriâ quidem Geometricâ exponam, interim tamen innuiſſe juverit Evolutarum contemplationem Hugenio deberi, Cycloidis inventæ gloriam Galileo, dimenſionem Torricellio; Logiſticam a Torricellio deſcriptam; illius proprietates ab Hugenio propoſitas, a Grandio demonſtratas fuiſſe; Spiralium doctrinam Cononis, & Archimedis ſtudio eſſe illuſtratam; Ciſſoidem a Diocle, a Nicomede Conchoidem, a Caſſino denique Caſſinoidem excogitatas. Præcipuas autem illarum proprietates, & accidentia hìc oſtendam, cetera ex Auctoribus ipſis intelligi, repetique poterunt.

§. I.

De Evolutis, & Evolventibus.

DEFINITIONES.

I.

SI lineæ in unam partem curvæ A B C D filum, vel linea flexilis circumplicata intelligatur, & manente unâ fili extremitate D illi affixâ, altera extremitas A ſenſim abducatur, vel a curvâ removeatur, ita ut pars illla, quæ ſoluta eſt, B E, C F, ſemper extenſa maneat, curva A E F G, quæ ab hac abductâ fili, vel lineæ flexilis extremitate deſcribitur, *Evolvens*, Figura VII. Tab. 8.

 vel

vel ex alterius *Evolutione deſcripta* vocatur; illa verò, cui filum, vel flexilis linea circumplicata fuerat, *Evoluta*.

II.

Porrò ex ipsâ curvarum evolutione facilè demonſtratur, quod libera, vel ſoluta fili pars EB, FC Evolutam ipſam in puncto B, vel C, tangit; ſi etenim producatur nunquam curvam ſecabit, ſed ab illâ potiùs recedet. Hinc partes illæ jam liberæ, & evolutæ *radii oſculatores* vocantur.

III.

Apparet etiam radios ipſos EB, FC correſpondentibus Evolutæ partibus AB, ABC æquales eſſe, totamque DG ab integrâ Evolutâ jam liberam, atque ſolutam toti Evolutæ æqualem eſſe.

IV.

Quod ſi filum, aut flexilis linea DG, ubi ab integrâ Evolutâ ABCD ſoluta fuerit, circa aliam curvam DHI priori ſimilem, & æqualem, eodemque modo poſitam circumvolvatur, deſcribetur in aliâ parte curva GKI priori Evolventi ſimilis, & æqualis; & recta AI curvæ AGI, hoc eſt Evolventis, *baſis* vocabitur.

PROPOSITIONES.

I.

Figura IX. *Quilibet radius* FC, *dum Evolutam tangit in* C, *curvam ex evolutione deſcriptam, ſive Evolventem, perpendicula-*

tulariter ſecat in F; hoc eſt, ſi ex puncto F erigatur FK, vel FV perpendicularis ad radium FC, ſingula illius puncta, præter F, extra curvam reperientur, nullusque radius ad illa puncta perveniet.

Ducatur enim, & protrahatur quilibet radius NK tangens Evolutam in N, extendaturque radius FC donec radium NO ſecet in M. Quia duæ rectæ CM, MN majores ſunt arcu Evolutæ CN, additis utrinque æqualibus partibus, nempe rectâ CF, & curvâ IHC, erunt rectæ FM, MN majores curvâ ICN, ſive radio NO, demptoque communi ſegmento MN, recta FM major erit rectâ MO; ſed recta MK, quæ in triangulo MFK recto (a), adeoque (b) majori angulo MFK opponitur, major eſt (c) rectâ FM, ergo multò major eſt eadem recta MK rectâ MO; ideoque radius NO ad punctum K non perveniet, hoc eſt punctum K extra curvam Evolventem reperietur.

a *Ex hyp.*
b 18. IV.
c 20. *III.*

Aſſumpto ſimiliter in alterâ perpendicularis parte, quæ proximior eſt initio evolutionis, puncto V, ductoque radio BV, qui extenſus ſecet radium FC in P, jungatur CB, & CE, quæ extenſa tangentem ſecet in S. Cùm itaque recta BC minor ſit arcu BC, additis utrinque æqualibus partibus, hoc eſt radio BE, & curvâ AB, erunt rectæ EB, BC, multòque magis recta EC minor curvâ ABC, vel radio FC; ſed in triangulo CFS latus CS, quod recto, adeoque majori angulo opponitur, ma-

jus eſt latere FC, ergo multò magis latus CS majus eſt latere, vel radio CE; adeoque radius EB ad punctum S, vel V non pertingit, ſive punctum V extrà curvam reperitur. Itaque recta VK, cui perpendicularis eſt radius CF, Evolventem tanget in F, unde radius ipſe Evolventem ipſam perpendiculariter ſecabit in F.

II.

Et è converſo rectæ FC, EB, ON, *quæ perpendiculares ſint ad curvam Evolventem, extenſæ curvam Evolutam tangent in aliquo puncto, eruntque radii Evolventis;* alioquin radius ad idem Evolutæ punctum ductus, non eſſet perpendicularis ad Evolutam.

III.

Figura VIII. *Si plures radii, vel rectæ* EB, FC, DG, NO *tangentes Evolutam in* B, C, D, N *curvam aliquam* AFGOI *perpendiculariter ſecent in punctis* E, F, G, O, *eadem curva* AFGOI *ab evolutione curvæ* ABDCI, *hoc eſt ab ejuſmodi radiorum extremitatibus, deſcribetur.*

Niſi etenim ab evolutione curvæ ABDCI deſcribatur curva AFGOI, deſcribetur alia curva AQRI. Extendatur itaque radius quilibet CF in Q. Erit ergo (a) radius CQ perpendicularis ad Evolutam AQRI, adeoque angulus CQT rectus erit, & recta QT parallela rectæ, ſive tangenti FV; quod eſt impoſſibile, cùm curvæ versùs punctum A, initium ſcilicet evolutionis, magis inter ſe accedere, ac tandem conjungi debeant, & angulus CQT minor angulo CFV, & acutus eſſe debeat. *Quod*

a Ex 1. hui.

IV.

Quod ſi linea flexilis, ſive filum non modò curvæ ONF, *ſed inſuper alicui* Fig. X. *rectæ lineæ* FA *circumplicetur, & ex illius evolutione Curva* AMBCID *deſcribatur, erit hæc Evolvens, ex Evolutâ* FNO *genita, eaſdemque omnino proprietates habebit, quæ in reliquis Evolutæ generibus ſunt oſtenſæ.*

Puncta verò F, G vocantur *foci*, vel *umbilici Curvæ* Evolventis.

§. II.

De Cycloide.

DEFINITIONES.

V.

SI circulus AEH tangens rectam AC in A Figura I. ſuper eandem rectam revolvatur, donec punctum A eandem rectam AC rurſus tangat in C, Curva, quæ ab eodem puncto A interim deſcribitur, *Cyclois*; vel *Trochois*; circulus verò, ex cujus revolutione Curva deſcribitur, *Circulus genitor*, & recta AC *baſis* Cycloidis; diameter Circuli genitoris BD *Axis* Cycloidis vocatur.

VI.

Ex ipsâ verò Cycloidis origine facilè apparet baſim AC integræ peripheriæ, rectam AD ſemiperiphæriæ DLB, arcum GE rectæ, vel parti baſis AG ſibicorreſpondentis æqualem eſſe.

PRO-

PROPOSITIONES.

V.

Figura IV. *SI in circulo* BDA *ducatur ex* A *recta quæcumque* AC *ſecans peripheriam in* D, *& ordinatam* OE *extra circulum ipſum productam in* C, *rectą* CE *major eſt arcu* ED.

a 13. V. Junctâ BD ducatur (a) ex puncto D tangens
b Ex16. V. DF; cùm itaque rectus (b), & externus angulus CDG æqualis ſit (c) angulis BAD, DBA, ſit-
c 15. IV. que, ob tangentem FD, angulus FDG æqualis angulo BA D(d), erit reliquus angulus CDF æ-
d 17. V. qualis reliquo angulo DBA, cui ſimiliter (ob ſimilitudinem triangulorum BDA, COA) (e) æ-
e Ex 17. IV. qualis eſt angulus OCD, vel FCD; æquales itaque ſunt anguli CDF, FCD, adeoque (f) latus
f 17. III. CF æquale lateri FD, adjectoque communi ſegmento FE, recta CE æqualis utrique DF, FE; ſed iſtæ majores ſunt arcu intercepto DE, ergo etiam recta CE major eſt arcu DE.

VI.

Quod *ſi recta ducatur ex* B, *ſecetque peripheriam in* D, *& ordinatam* OE *intra circulum in* G, *erit arcus* ED *major rectâ* EG.

Ductis enim, ut antea, AC, FD, junctâque DE, oſtendentur æquales anguli CDF, DCF, ſed anguli

guli CDF, FDG, ſicuti duo DCF, DGF uni recto (a), & inter ſe ſunt æquales, ergo etiam reliqui FDG, FGD æquales erunt, unde angulus FGD major erit angulo EDG, & latus DE angulo majori oppoſitum, majus erit (b) latere, vel interceptâ EG, ideoque multò magis arcus DE eâdem rectâ EG major erit.

a *Ex* 16. *V.*
b 20. III.

VII.

Si ex puncto quolibet E *Cycloidis* ABC *ducatur* EI *ordinata ad axim, vel baſi parallela ſecans peripheriam circuli genitoris in* L, *erit ſemper intercepta* EL *æqualis arcui* LB *circuli genitoris.* Fig. I.

Dum circulus genitor ſuper baſim AC revolvitur, ejuſque punctum A pervenerit in E, circulus ipſe baſim continget in G, ideoque conjunctis EG, LD, ob æquales arcus EG, LD, adeoque ob æquales angulos, qui a tangentibus AG, AD cum ſecantibus GE, DL fiunt, rectæ EG, LD æquales erunt (c), & parallelæ, quemadmodum æquales etiam, & parallelæ ſunt (d) rectæ GD, EL; cùm itaque tota baſis AD æqualis ſit (e) ſemiperipheriæ DLB, & recta, vel pars AG æqualis arcui GE, vel DL, erit etiam reliqua GD, ſive EL æqualis reliquo arcui LB.

c 8. V.
d 10. IV.
e *Ex def.* 6.

VIII.

Si ex quolibet Cycloidis puncto K *ordinetur ad axim recta* KL *ſecans genitoris circuli peripheriam in* M, *ducaturque per* K, *recta* NO *chordæ* BM *cor-* Fig. II.

ref-

reſpondentis arcûs parallela, illa Cycloidem tanget in K, *hoc eſt ſingula illius puncta præter* K *extra Cycloidem reperientur.*

Aſſumpto quolibet ſuperiori puncto N ordi-
a 10. netur N P. Cùm itaque recta K M, vel (a) N V
IV. ſit (b) æqualis arcui MQB, arcus autem MQ ma-
b *Ant.* jor ſit rectâ QV (c) erit reliqua linea QN major
c 6. *hui.* arcu reliquo QB, ſive rectâ QR, quæ eidem arcui eſt æqualis (d), adeoque punctum N extra
d *Ant.* Cycloidem reperitur.

Similiter etiam aſſumpto quolibet inferiori puncto O ordinetur OS, eritque recta M K, ſive OZ æqualis arcui BQM, ſed recta T Z major eſt arcu M T, ergo recta OT major erit arcu BQMT, ſive (e) rectâ T X, ideoque etiam
e *Ant.* punctum O extra cycloidem reperitur.

IX.

Fig. I. Hinc facilè apparet, quod *recta* G E, *conjungens punctum contactûs* G *cum puncto* E, *in quo circulus genitor Cycloidem ſecat, perpendicularis eſt ad curvam Cycloidis in eodem puncto, ſive ad tangentem, quæ per idem punctum Cycloidis duceretur.*

Cùm etenim tangens ad punctum E parallela
f *Ant.* eſſe debeat chordæ LB (f), & recta GE parallela ſit rectæ DL, quemadmodum recta DL perpendicularis eſt ad chordam LB, ita recta GE perpendicularis erit ad tangentem Cycloidis in puncto E.

Ex

X.

Ex curvæ Cycloidis ANO *evolutione initioducto ab illius apice* A *deſcribitur alia Cyclois evolutæ ſimilis, & æqualis.* Fig. I.

Ad quodlibet evolutæ Cycloidis punctum N ducatur tangens N E (a), atque per O ducatur O B parallela axi M A, completoque rectangulo M D ponatur D B æqualis ipſi O D, vel axi M A, deſcribanturque circuli genitores D L B, G E F tangentes rectam A D in punctis D, G. a 8. *huius.*

Cùm itaque radius, vel tangens NG ſit (b) chordæ K A æqualis, & parallela, erit (c) etiam AG æqualis rectæ K N, vel arcui K A; ſed arcus K A, G E, ob æquales alternos angulos K A G, AGE, vel chordas AK, EG, ſunt æquales, ergo ſimiliter recta AG erit æqualis arcui GE, ideoque (d) punctum E ad illam cycloidem pertinebit, quæ ſuper A C deſcribatur a circulo D L B, ſive A K M; eritque (e) recta G E, ſive N E perpendicularis ad cycloidem ipſam; quod cùm ubique verificetur, hoc eſt radii, qui ducuntur a ſingulis punctis N evolutæ cycloidis perpendiculares ſint ad Cycloidem evolventem, eadem Cyclois ABC deſcribetur ab evolutione cycloidis ANO (f). b 8. *hujus.* c 10. IV. d *Ex Deſin.* 5. e *Ant.* f 3. *huius.*

XI.

Curva Cycloidalis A B C *quadrupla eſt diametri circuli genitoris.*

Cùm enim curva cycloidis evolutæ A N O, vel æqualis ipſi curva cycloidis evolventis AEB æqualis ſit radio libero, vel integrè evoluto O B, erit integra curva A B C dupla ejuſdem radii O B, adeoque quadrupla diametri D B.

Cy-

XII.

Cycloïs tripla eſt ſui circuli genitoris.

Fig. II. Aſſumpto in axe cycloidis puncto quolibet L, aſſumatur infra circuli centrum punctum aliud S æqualiter diſtans ab eodem centro, ordinenturque per eadem puncta L, S rectæ SG, LΓ, ſecantes cycloidem in punctis I, E, circulum genitorem in Θ, Δ, denique per punctum I deſcribatur circulus genitori æqualis tangens baſim in H.

a 7. huius. Erit ergo (a), ob cycloidem, recta EΘ ſemper æqualis arcui ΘB, ſive ΔD, ſive IH, ſive (b) rectæ
b def. 6. AH, ſive rectæ GY, ſive denique rectæ GI unà cum rectâ ΔS, atque ita ſemper donec ad centrum perveniatur, ergo rectæ omnes in trilineo, vel ſpatio cycloidali AIEBΘΔD, vel ſpatium ipſum, erit æquale rectis omnibus in trilineo AFBEI, & ſemicirculo BΘΔD, vel ipſi trilineo unà cum ſemicirculo, ideoque, ſpatium cycloidale dimidium erit rectanguli AB,
c 18. VII. ſed rectangulum AB quadruplum eſt (c) ſemicirculi, ergo ſpatium cycloidale duplum erit ejuſdem ſemicirculi, adeoque ſpatium cavum cycloidale cum ſemicirculo, ſive ſpatium ſemicycloidis, triplum erit ſemicirculi, & integra cyclois tripla ſimiliter erit integri circuli genitoris.

§. III.

§. III.

De Logiſticâ, ſive Logarithmicâ.

DEFINITIO.

VII.

SI recta, vel axis AB in quotcumque æquales partes AC, CD dividatur, & a punctis A, C, D, &c. ordinentur rectæ AF, CG, DH, &c. quæ ſint in continuâ proportione geometricâ, Curva, quæ per ſingulas ordinatarum extremitates ducitur, *Logiſtica*, vel *Logarithmica* vocatur. Figura XI.

PROPOSITIONES.

XIII.

*S*Patia logiſtica ABCD, BCFE, *quæ æquales habent altitudines* AB, BE, *ſunt inter ſe ut illorum baſes* AD, BC. Figura XII.

Intelligantur enim æquales altitudines AB, BE in totidem quotcumque minimas æquales partes AG, Gg, &c. BI, Ii, &c. dividi, & ex ſingulis diviſionum punctis G, g, I, i, duci ordinatæ GH, gh, IK, ik baſibus AD, BC parallelæ.

læ. Cùm itaque ex ipsâ Logiſticæ naturâ ſit A D ad B C ut G H ad I K, erit permutando ut baſis A D ad primam ordinatam G H, ita baſis B C ad primam ordinatam I K: Cùmque ſimiliter ordinatæ ſingulæ æquidiſtantes eandem rationem ſervent, erunt omnes ordinatæ in ſpatio A B C D ad totidem ordinatas omnes in ſpatio B C F E, hoc eſt eadem ſpatia, inter ſe ut baſis A D ad baſim B C.

XIV.

Etiam *ſpatia infinita, quæ poſt ordinatas* A D, *&* B C *extenduntur, ſunt inter ſe ut baſes ipſæ, vel ordinatæ* A D, B C.

Hæc etenim ſpatia infinita æquè alta ſupponi poſſunt, cùm inter ſe differant ſpatio A B C D, hoc eſt finitâ quantitate, quæ nullam ad alterutrum illorum proportionem habet, adeoque erunt inter ſe ut baſes ipſæ.

Quemadmodum ſi utrumque ſpatium infinitum in totidem æquè altas partes dividatur, erunt ſingulæ eorundem ſpatiorum partes ſibi ordine reſpondentes ut illorum baſes; adeoque omnes infinitæ partes unius ſpatii ad omnes infinitas partes alterius, hoc eſt eadem infinita ſpatia, erunt inter ſe ut illorum baſes AD, BC.

XV.

Si ad aſymptotum Logiſticæ A E *ordinentur rectæ* A D, B C, *compleaturque rectangulum* A O, *ſpatium finitum* A B C D, *quod utrâque ordinatâ Logiſticæ, ejuſque aſymptoti parte continetur,*

erit

erit ad infinitum ſpatium BCX *ut intercepta* CO, *ad* CB, *hoc eſt ut ordinatarum differentia ad ordinatam minorem.*

Cùm enim ſpatium infinitum poſt AD ad ſpatium infinitum poſt BC ſit (a) ut ipſa AD, vel BO ad BC, erit dividendo ſpatium finitum ABCD ad reliquum infinitum poſt BC ut recta CO ad BC. a 14. *huius*

XVI.

Spatia quæcumque ABCD, AEFD *poſt eandem ordinatam* AD *extenſa ſunt inter ſe ut* CO *ad* FN.

Cùm etenim ſpatium ABCD ad infinitum ſpatium poſt BC, ſit ut CO ad BC, (b) & idem infinitum ſpatium poſt BC ad ſpatium ſimiliter infinitum poſt EF, ſit (c) ut eadem BC ad EF, ac denique ſpatium infinitum poſt EF ſit (d) ad finitum ſpatium ſibi ſubjectum EADF, ut recta EF ad FN, erit ex æquo ſpatium ABCD ad ſpatium AEFD, ut recta CO ad FN. b *Ant.* c 14. *huj.* d *Ant.*

XVII.

Hinc autem facilè apparet, quod *aſſumptâ lineâ* Z, *quae cum interceptâ* CO *rectangulum efficiat aequale ſpatio* ABCD, *eadem conſtans recta* Z *cum interceptâ* FN *rectangulum contineret aequale ſpatio* AEFD.

Siquidem tam rectangula, quàm ſpatia logiſtica forent in eâdem ratione CO ad FN, adeoque ſi primum rectangulum eſt æquale primo

ſpatio, etiam ſecundum erit æquale ſecundo, atque ita deinceps. Recta Z Logiſticæ *Parameter* vocetur.

XVIII.

Figura XIV. *Ad datum Logiſticae punctum* D *tangentem ducere*.

Ordinatâ rectâ A D abſcindatur A C Parametro æqualis, conjungaturque recta C D, hæc Logiſticam ipſam tanget in D, hoc eſt omnia illius puncta, præter D, extra curvam Logiſticam reperientur.

Sumpto enim quolibet puncto E infra punctum contactûs D, ordinatâque per E B F; quia, ob A D, FE, & A C, D F parallelas, triangula C A D, D F E ſimilia ſunt, erit (a) C A ad A D ut D F ad F E; adeoque rectangulum ex extremis C A, F E erit æquale rectangulo ex intermediis A D, D F, nempe rectangulo B A D F; ſicuti rectangulum ex C A, F G eſt (b) æquale ſpatio B A D G; ſed rectangulum B A D F majus eſt ſpatio B A D G, ergo ſimiliter rectangulum ex C A, F E majus erit rectangulo ex eâdem CA in FG, adeoque recta F E major eſt rectâ F G, & punctum E extra Logiſticam reperitur.

a I. VII. b Ante

Quod ſi punctum K ſupra contactum D ſumatur, ordineturque M N; ob ſimilia triangula C A D, D O K, erit C A ad A D ut D O ad O K, adeoque rectangulum ex extremis C A, O K erit æquale rectangulo ex intermediis A D, D O; ſicuti rectangulum ex eâdem C A in O M eſt æquale ſpatio ANMD, ſed ſpatium ANMD eſt majus rectangulo A N O D, ergo ſimiliter rectangulum ex C A in O M majus erit rectangulo

gulo ex eâdem CA, in OK; unde MO major erit quàm OK; ideoque punctum K extra Logiſticam reperitur, & conſequenter tota CK Logiſticam curvam tanget in D.

XIX.

Cùm recta, ſive ſubtangens AC parametro æqualis aſſumpta fuerit, apparet, quod *ſubtangentes Logiſticae ſemper, ex quocumque puncto tangens ducatur, eidem conſtanti parametro, ac inter ſe, ſunt æquales.*

XX.

Spatium infinitum poſt quamlibet ordinatam Logiſticæ BG *eſt aequale rectangulo ex parametro, aut ſubtangente* AC, *vel* BV *in ordinatam ipſam* BG, *ſive duplum eſt trianguli* VBG, *quod ab ordinatâ ipſâ, tangente, ac ſubtangente continetur.* Figura XIV.

Cùm etenim ſpatium ABGD ad ſequens infinitum ſpatium poſt ordinatam BG ſit (a) ut FG ad GB, ſive (b) ut rectangulum ex AC in FG ad rectangulum ex eâdem AC in GB, erunt ſpatia ipſa rectangulis proportionalia, adeoque, ſicuti ſpatium ABGD eſt (c) æquale rectangulo ex AC in FG, ita ſpatium infinitum poſt BG erit æquale rectangulo ex AC, vel VB in ordinatam ipſam BG, ſive infinitum ſpatium duplum erit trianguli VBG, quod ab ordinatâ BG, tangente VG, & ſubtangente BV continetur.

a 15. *huj.*
b. 4. *VI.*
c. 17. *huj.*

XXI.

Figura XIII. *Solidum infinitum genitum ex infinito ſpatio Logiſticae* ABXFD *circa asymptotum* AB *revoluto ſeſquialterum eſt Coni geniti ex revolutione trianguli* ADC, *quod a tangente, ſubtangente, & ordinatâ ipsâ continetur.*

Intelligatur enim ſolidum infinitum ABXFD in infinitas minimas æquè altas partes dividi, quibus circumſcripti ſint exigui cylindri æquè alti, quales ab æquè altis rectangulis AH, GK, &c. circa asymptotum AB revolutis gignerentur, ponaturque recta CM ſubtangenti CA æqualis.

Quoniam ergo ex naturâ Logiſticæ, circuli ex AD, GI, NO, &c. qui ſunt ejuſmodi cylindrorum baſes, ſunt in continuâ proportione, erunt cylindri quoque (a) æquè alti in eadem continuâ proportione; adeoque primus cylindrus AH in ſolido infinito poſt ordinatam AD erit ad primum cylindrum GK in ſolido infinito poſt ordinatam GI, ut ſecundus cylyndrus GK in primo ſolido poſt AD ad ſecundum cylindrum NQ in ſecundo ſolido poſt GI, atque ita ſemper, ergo omnes cylindri in primo ſolido, hoc eſt ſolidum ipſum infinitum poſt AD, erunt ad omnes cylindros in ſecundo ſolido, hoc eſt ad ſolidum ipſum infinitum poſt GI, ut primus cylindrus AH in primo ſolido ad ſecundum cylindrum GK in ſecundo ſolido, ſive ut circulus, aut quadratum ex radio AD ad circulum, aut quadratum ex radio GI;

a 13 IX.

vel

vel, ob tangentis particulam infinitè parvam D V, ut quadratum ex A D ad quadratum ex G V, ſive, ob A D, G V parallelas, ut quadratum ex AC ad quadratum ex CG (a), & dividendo primum ſolidum infinitum poſt A D ad cylindrum A H utriuſque infiniti ſolidi differentiam erit ut quadratum ex A C ad rectangulum M G A utriuſque quadrati A C, & C G differentiam. a Ex 2. VII.

Dividatur jam altitudo coni, ſive ſubtangens A C in tres æquales partes in Z, & X; intelligaturque ſuper eâdem baſi coni, hoc eſt ſupra circulum ex radio A D, & altitudine A Z deſcriptus cylindrus A Y, qui erit æqualis cono, cùm uterque ſit (b) tertia pars Cylindri cono circumſcripti ad altitudinem A C. b 10. & 16.

Cùm itaque ſolidum infinitum poſt ordinatam A D ſit ad cylindrum A H ut quadratum ex A C ad rectangulum ex M G in G A, & idem cylindrus A H ſit (c) ad cylindrum A Y, ſive ad inſcriptum conum A C D, ut AG ad AZ, vel (d) ut rectangulum ex M G in G A ad rectangulum ex eadem M G, in A Z, erit ex æquo ſolidum infinitum ad conum ut quadratum ex C A ad rectangulum ex M G in A Z; vel, ob particulam GA indefinitè parvam, ad rectangulum ex MA in A Z, vel ipſi æquale (e) rectangulum ex C A in A X; ſed quadratum ex C A ſeſquialterum eſt rectanguli ex C A in A X, (f) cùm rectâ C A ſeſquialtera ſit alterius rectæ A X, (g) ergo ſolidum infinitum genitum ab infinito ſpatio logiſtico poſt ordinatam A D ſeſquialterum eſt coni geniti a triangulo A D C, quod ab ordinatâ ipſâ, tangente, & ſubtangente continetur. IX. c 16. IX. d 4. VI. e 12. VI. f 4. VI. g ex conſtr.

§. IV.

De Spirali.

DEFINITIO.

VIII.

Figura VI. SI circuli radius AE circa punctum E immobile circumducatur, punctum, vel extremitas A circuli peripheriam deſcribet. Concipiatur interim idem punctum A per totum radium AE æquabili, ac uniformi motu moveri, itaut ex. gr. dum punctum A perveniens in B tertiam peripheriæ partem deſcripſerit, deſcendens versùs centrum E, rectam BD tertiam radii partem permeaverit; atque ita ſemper donec punctum A completâ jam peripheriâ ad idem punctum A circulari motu revertatur, & motu recto, emenſo jam radio, perveniat ad centrum E, curva ADE, quæ hoc duplici motu, circulari nimirum, & recto deſcribitur a puncto A, erit *Spiralis*.

IX.

Fig.III. Quod ſi motus ille, quo punctum A versùs centrum H deſcéndit, non percurrat partes in radio ſimiles illis, quas idem punctum in peripheriâ percurrit; ſed ex. gr. ubi tertiam partem in peripheriâ deſcripſerit, ſextam ſolùm in radio percurrat, atque bis peripheriam interim percurrat dum integrum radium ſemel, tunc erit *Spiralis*, ſed ſecundæ revolutionis, &c.

Pri-

PROPOSITIONES.

XXII.

Si per quodlibet Spiralis punctum D *ducatur radius* EB, *ſemper erit* EB *ad* BD *ut integra peripheria* ABC *ad arcum* AB. Fig. VI.

Cùm enim punctum A per integram peripheriam ABC, & radium AE, vel BE æquabiliter moveatur(a), erit ſpatium peractum in peripheriâ, nempe arcus AB, ad ſpatium peractum in radio, nempe rectam BD, ut integra peripheria ad integrum radium; permutandoque integra peripheria ad arcum AB ut radius EB ad partem BD.

a *Ex defin.* 9.

XXIII.

Si per quodlibet punctum D *deſcribatur circulus* FDK, *erit integra peripheria illius* FDK *æqualis arcui* ACB *peripheriæ majoris, ſive circuli genitoris.*

Integra peripheria ABC eſt (b) ad arcum AB ut EB ad BD, ergo per converſionem rationis eadem peripheria ad reliquum arcum ACB erit ut radius EB ad radium ED, ſive(c) eadem integra peripheria ABC ad peripheriam minorem FDK, adeoque (d) arcus ACB erit æqualis peripheriæ FDK.

b *Ant.*
c 14. VII.
d *Ax.* 2. *I.*

XXIV.

Integræ peripheriæ ABC, FDK, & *arcus* FD *minoris peripheriæ ſunt in continuâ proportione.*

a 14. VII. Peripheria A B C ad peripheriam F D K eſt ut B E ad E D (a), ſive (b) ut arcus B A, hoc
b 15. VII. eſt (c) eadem peripheria minor F D K, ad arcum ſimilem F D.

c Ex Antec. Arch. 25. ſpir.

XXV.

Circulus A B C *triplus eſt ſpatii ſpiralis* A D E A.

Spatium ſpirale A D E A componitur ex tot arcubus circularibus arcui F D, ſibique concentricis, ac parallelis quot ſunt puncta in radio A E.

Itaque ſuper radio E A deſcribatur rectangulum E G, cui inſcribatur parabola G E H; aſſumptoque in radio A E puncto quolibet F ordinetur F I axi parabolæ parallela, deſcribaturque circulus F D K ſecans Spiralem in D.

Quoniam, ob parabolam, tres rectæ F I,
d Ex 7. XI. F O, F V ſunt (d) in eâdem continuâ proportione, atque ſimiliter, ob ſpiralem, peripheria A B C,
e Ant. peripheria F D K, & arcus F D ſunt (e) in continuâ proportione, & prima peripheria A B C eſt ad ſecundam F D K ut prima recta A G, vel F I ad
f 14. VII. ſecundam F O, nempe (f) ut radius A E ad E F, atque ita ſemper, erit ex æquo prima F I ad tertiam F V ut peripheria A B C ad arcum F D, ergo omnes rectæ in rectangulo G E, ſive rectangulum ipſum, erit ad totidem rectas in trilineo parabolico G V E A, ut omnes peripheriæ æquales ipſi peripheriæ A B C, hoc eſt rectangulum ex radio A E in peripheriam A B C, ad arcus omnes in ſpatio ſpirali, ſive ad ſpatium ipſum ſpirale, ſed rectangulum G E ſextuplum
g 7. XI. eſt (g) trilinei parabolici, ergo etiam rectangulum

ex

ex radio A E in peripheriam A B C, quod eſt (a) duplum circuli A B C, ſextuplum erit ſpatii ſpiralis, adeoque circulus ipſe A B C triplus erit ejusdem ſpatii. a 18. VII.

XXVI.

Quod *ſi ponatur* A G *æqualis peripheriæ* A B C, *tunc rectangulum* G E *duplum eſset* (b) *circuli* A B C, *vel æquale triangulo* GEA; *& trilineum parabolicum* GVEA *eſſet* (c) *aequale ſpatio ſpirali*. b 18. VII. c Ex antec. & 7. XI.

XXVII.

Hinc *inveniri, vel aſſignari poteſt parabola* H X G, *quae ſit* ſexta pars parabolæ H E G, adeoque *aequalis ſpatio ſpirali*.

§. V.

De Ciſſoide.

DEFINITIO.

X.

Si aſſumpto circulo A B C, ordinatiſque B E, *be* fiat ut A E ad EB, ſive (d), ut EB ad EC ita eadem EC ad E G, atque ita ſemper, curva, quæ per C, & ſingula puncta G, g tranſibit, erit *Ciſſois* a Diocle inventa. Fig. V. d 30. VII.

XI.

Diameter circuli genitoris A C dicatur *baſis* Ciſsoidis; recta infinita A L ejusdem Ciſſoidis *Aſymptotus* vocetur.

So-

XXVIII.

Solidum infinitè longum genitum ab infinitè longo ſpatio, quod a curvâ Ciſſoidis C G g, *ejuſque baſi* A C *continetur, circa aſymptotum revoluto eſt aequale annulo circulari genito ex ſemicirculo genitore* ABC, *circa eandem aſymptotum revoluto.*

Cùm enim ex naturâ Ciſſoidis ſit AE ad EB, ut C E ad E G, permutandoque A E ad E C ut
a 14. B E ad E G, & ut A E ad E C ſit (a) peripheria
VII. circuli, qui deſcribitur a radio A E ad peripheriam circuli, qui deſcribitur a radio C E, erit ut B E ad E G, ita peripheria ex radio A E ad pe-
b 12. ripheriam ex radio EC; adeoque (b) rectangulum
VII. ex B E in peripheriam ex radio E C, ſive cylindrica ſuperficies deſcripta intra annulum circularem a rectâ B E circa tangentem D C revolutâ, erit æquale rectangulo ex E G in peripheriam ex radio A E, ſive cylindricæ ſuperficiei genitæ intra ſolidum ciſſoidale a rectâ E G circa aſymptotum, vel tangentem A L revolutâ, quod cùm ſemper verificetur, ubicumque punctum E ſumatur, erunt omnes cylindricæ ſuperficies in ſolido cyſſoidali ſemper æquales omnibus cylindricis ſuperficiebus in annulo, hoc eſt ſolidum ipſum infinitè longum erit æquale annulo circulari, qui ex ſemicirculo genitore circa tangentem DC, vel aſymptotum AL revoluto producitur.

§. V.

§. VI.

De Conchoide.

DEFINITIO.

XII.

SI ad lineam rectam A B ex quolibet puncto C ducatur perpendicularis C E, aliæque rectæ C F, C G, C H, & illarum ſegmenta D E, L F, M G, N H æqualia ponantur, Curva, quæ per extrema, vel puncta E, F, G, H tranſibit, erit Conchois a Nicomede deſcripta. Figura XV.

Punctum C vocatur *polus*, recta A B *regula*.

XXIX.

Cùm rectæ lineæ, ſive ſegmenta D E, L F, M G, N H ſemper magis inclinata, vel obliqua ſint, ſemper illorum extremitates E, F, G, H ad rectam A B magis accedent, hoc eſt perpendiculares F O, G P, H B minores erunt, adeoque *conchilis linea ad regulam ſemper magis accedet, nunquam tamen, etiamſi in infinitum producatur, ad illam pervenire, ſive cum illâ concurrere poterit*

Cum inter rectam A B, & puncta Conchoidis ſegmentum aliquod N H, vel ipſi æquale intercipi debeat.

§. VII.

§. VII.

De Caſſinoide.

DEFINITIO.

XIII.

Figura X. SI ſuper AD ejuſmodi Curva AMBCID deſcribatur, ut aſſumptis in rectâ AD punctis F, G æqualiter hinc inde a centro H remotis; & inclinatis ad quælibet puncta B, C rectis FB, BG; FC, CG, ſint rectangula ex inclinatis ipſis inter ſe ſemper æqualia, eadem Curva Caſſinois vocatur.

XXX.

a 12. VI. Itaque *in Caſſinoide ſemper erit* (a) FB *ad* FC *ut* CG *ad* GB.

Omnibus his editis licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi ſui ſententiâ judicare.

Apoll. Perg. Epiſt. ad Eudemum.

EU-

EUCLIDIS

PROPOSITIONES

Juxta methodum Theonis vulgatam, cum locis hujus Operis, in quibus eædem Euclidis propoſitiones exponuntur.

Primus numerus indicat propoſitionem, Secundus librum, Tertius paginam harum Inſtitutionum. Aſteriſcus autem propoſitioni appoſitus, ſignificat hanc velut inutilem omiſſam eſſe.

LIBER I.

1 SUper datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum conſtituere. ex propoſit. 1. lib. III. Pag. 76.

2 Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. 4. III. 79.

3 Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de majore æqualem minori rectam lineam detrahere. 5. III. 79.

4 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrunque utrique, habeant verò & angulum angulò æqualem ſub æqua-

æqualibus rectis lineis contentum & baſem baſi æqualem habebunt, eritque triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur. 11. III. 82.

5 Iſoſcelium triangulorum qui ad baſim ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales: & ſi ulteriùs productæ ſint æquales illæ rectæ lineæ, qui ſub baſi ſunt anguli, inter ſe æquales erunt. 17. III. 86.

6 Si trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint, & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt. 19. III. 87.

7 Super eadem rectâ lineâ, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales utraque utrique non conſtituentur ad aliud atque aliud punctum ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Deducitur ex pr. 12. III. 83.

8 Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, utrumque utrique, æqualia, habuerint verò, & baſim baſi æqualem, angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt. 12. III. 83.

9 Datum angulum rectilineum bifariam ſecare. 21. III. 87.

10 Datam rectam lineam finitam bifariam ſecare. 1. III. 76.

11 Data rectâ lineâ, a puncto in eâ dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare. 2. III. 77.

12 Super datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in eâ non eſt, perpendicularem rectam deducere. 3. III. 78.

13 Cùm

13 Cùm recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet. 6. III. 79.

14 Si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui ſunt deinceps angulos, duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ. 9. III. 81.

15 Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecuerint, angulos, qui ad verticem ſunt, æquales inter ſe efficient. 8. III. 80.

16 Cujuſcunque trianguli uno latere producto, externus angulus utroque interno, & oppoſito major eſt. 18. IV. 100.

17 Cujuſcunque trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti. 18. IV. 100.

18 Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit. 18. III. 86.

19 Omnis trianguli major angulus majori lateri ſubtenditur. 20. III. 87.

20 Omnis trianguli duo latera reliquo ſunt majora, quomodocunque aſſumpta. def. 6. III. 74.

21 Si ſuper trianguli uno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interiùs conſtitutæ fuerint, hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem verò angulum continebunt. ex 12. III. 83.

22 Ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliquâ eſſe majores omnifariam ſumptas, quoniam uniuſcujuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta, reliquo ſunt majora. 24. III. 88.

23 Ad

23 Ad datam rectam lineam, datumque in eâ punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere. 22. III. 88.

24 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique, angulum verò angulo majorem ſub æqualibus rectis lineis contentum, & baſim baſi majorem habebunt. 15. III. 85.

25 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrunque utrique, baſim verò baſi majorem, & angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo majorem habebunt. 14. III. 84.

26 Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrumque utrique unumque latus uni lateri æquale, ſive quod æqualibus adjacet angulis, ſeu quod uni æqualium angulorum ſubtenditur, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. 10. III. 81.

27 Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit, parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ. 2. IV. 94.

28 Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales, parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ. 3. IV. 94.

29 In parallelas rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos inter ſe æquales efficit, & externum interno, & oppoſito, & ad

ad eaſdem partes æqualem; & internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales facit. *6.* & *7.* IV. 96.

30 Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ 8. IV. 97.

31 A dato puncto datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere 4. IV. 95.

32 Cujuſcumque trianguli uno latere ulteriùs producto externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales 15. *16.* IV. 99. 100.

33 Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem conjungunt, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt 9. IV. 97.

34 Parallelogrammorum ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe quæ ex adverſo, & latera, & anguli: atque illa bifariam ſecat diameter. 10. 12. IV. 97. 98.

35 Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia 5. VI. 119.

36 Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia 5. VI. 119.

37 Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 5. VI. 119.

38 Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 5. VI. 119.

39 Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta in eiſdem ſunt parallelis *6.* VI. 120.

40 Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta, & in eiſdem ſunt parallelis. *6*. VI. 120.

41 Si parallelogrammum cum triangulo eandem baſim habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli. 7. VI. 120.

42 Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo 8. VI. 120.

43 In omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia. 13. IV. 98.

44 Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo. *

45 Dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo. *

46 A datâ rectâ lineâ quadratum deſcribere. 11. IV. 98.

47 In rectangulis triangulis quadratum quod a latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribantur, quadratis 33. VII. 143.

48 Si quadratum, quod ab uno laterum trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis, angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus rectus eſt. 46. VII. 148.

LIBER II.

1 SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera in quotcunque ſegmenta, rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis li-

lineis æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub inſectâ, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur. ex 1. VI. 118.

2 Si recta linea ſecta ſit utcunque, rectangula quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à totâ ſit, quadrato. 38. VII. 144.

3 Si recta linea ſecta ſit utcumque, rectangulum ſub totâ, & uno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt illi, quod ſegmentis comprehenditur, rectangulo, &.illi, quod a prædicto ſegmento deſcribitur quadrato. 36. VII. 144.

4 Si recta linea ſecta ſit utcumque quadratum, quod a tota deſcribitur, æquale eſt & illis, quæ a ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo 37. VII. 144.

5 Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum unà cum quadrato, quod fit ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei, quod a dimidia deſcribitur, quadrato 40. VII. 145.

6 Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur, rectangulum comprehenſum ſub tota cum adjecta, & adjectâ, ſimul cum quadrato à dimidia, æquale eſt quadrato a linea, quæ tum ex dimidia, cum ex adjecta componitur, tanquam ab una deſcripto. 41. VII. 145.

7 Si recta linea ſecetur utcumque, quod a tota, quodque ab uno ſegmentorum, utraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quòd bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehen-

 ditur,

ditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato. 39. VII. 145.

8 Si recta linea ſecetur utcumque, rectangulum quater comprehenſum ſub totâ, & uno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit quadrato, æquale eſt ei, quod à totâ, & dicto ſegmento, tanquam ab unâ lineâ deſcribitur, quadrato. ex 39. VII. 145.

9 Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, quadrata; quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, duplicia ſunt, & ejus, quod à dimidiâ, & ejus, quod ab intermediâ ſectionum fit, quadratorum. *

10. Si recta linea ſecetur bifariam, adijciatur autem in rectum quæpiam recta linea: quod à totâ cum adjunctâ, & quod ab adjunctâ, utraque ſimul quadrata, duplicia ſunt, & ejus, quod à dimidiâ, & ejus, quod à compoſitâ ex dimidiâ, & adjuncta, tanquam ab unâ deſcriptum ſit, quadratorum. *

11 Datam rectam lineam ſecare, ut comprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato. 42. VII. 146.

12 In amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, majus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus pro quantitate rectanguli bis comprehenſi, & ab uno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab aſſumptâ exteriùs lineâ ſub perpendiculari propè angulum obtuſum. 44. VII. 147.

13 In

13 In oxygoniis triangulis, quadratum a latere angulum acutum ſubtendente, minus eſt quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulum comprehendentibus, pro quantitate rectanguli bis comprehenſi, & ab uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interiùs linea ſub perpendiculari propè acutum angulum. 45. VII. 147.

14 Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere. ex 13. VI. & 31. VII. 122. 142.

LIBER III.

1 DAti circuli centrum reperire. 3. V. 106.

2 Si in circuli peripheriâ duo quælibet puncta accepta fuerint, recta linea, quæ ad ipſa puncta adjungitur, intra circulum cadet. *

3 Si in circulo recta quædam linea per centrum extenſa quandam non per centrum extenſam bifariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit. 1. V. 105.

4 Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecent non per centrum extenſæ, ſe ſe mutuò bifariam non ſecabunt. ex 1. V. 105.

5 Si duo circuli ſe ſe mutuò ſecent, non erit illorum idem centrum. *

6 Si duo circuli ſe ſe mutuò interiùs tangant, eorum non erit idem centrum. *

7 Si in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ li-

neæ cadant, maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper major eſt. Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad utraſque partes minimæ. *

8 Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ verò, ut libet, in cavam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper major eſt. In convexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum, minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur: aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantùm rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt ad utraſque partes minimæ. *

9 Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum centrum ipſius eſt circuli. 4. V. 106.

10 Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non ſecat. *

11 Si duo circuli ſe ſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra, ad eorum centra adjuncta recta linea, & producta in contactum circulorum cadet. *

12 Si

12 Si duo circuli ſe ſe exteriùs contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adjungitur, per contactum illorum tranſibit. *
13 Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm uno, ſive intus, ſive extra tangat. *
14 In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant a centro. Et quæ æqualiter diſtant a centro, æquales ſunt inter ſe. ex 8. V. 108.
15 In circulo maxima quidem linea eſt diameter: aliarum autem propinquior centro remotiore ſemper major. *
16 Quæ ab extremitate diametri cujuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet, & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet. Et ſemicirculi quidem angulus quovis angulo acuto rectilineo major eſt, reliquus autem minor. 11. V. 109.
17 A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum. 13. V. 109.
18 Si circulum tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adjungatur recta quædam linea, quæ adjuncta fuerit ad ipſam contingentem perpendicularis erit. 12. V. 109.
19 Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, a contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur, in excitatâ erit centrum circuli. 12. V. 109.
20 In circulo angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam cùm fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 14. V. 110.

21 In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales. 15. V. 111.

22 Quadrilaterorum in circulis deſcriptorum anguli, qui ex adverſo, duobus rectis ſunt æquales. 18. V. 112.

23 Super eadem rectâ lineâ, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ad easdem partes. *

24. Super æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia. *

25 Circuli ſegmento dato deſcribere circulum, cujus eſt ſegmentum. 6. V. 107.

26 In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt ſive ad centra, ſive ad peripherias conſtituti inſiſtant. 7. V. 107.

27 In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales ſive ad centra, ſive ad peripherias conſtituti inſiſtant. 7. V. 107.

28 In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, majorem quidem majori, minorem autem minori. 8. V. 108.

29 In æqualibus circulis æquales peripherias æquales rectæ lineæ ſubtendunt. 8. V. 108.

30 Datam peripheriam bifariam ſecare. 9. V. 108.

31 In circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in majore ſegmento, minor recto: qui verò in minore ſegmento, major eſt recto. Et inſuper angulus majoris ſegmenti, recto quidem major eſt: minoris autem ſegmenti angulus minor eſt recto. 16. V. 111.

32 Si circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea

nea circulum ſecans, anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt iis, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis. 17. V. 111.

33 Super datâ rectâ lineâ deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo. ex 17. & 25. V. 111. 115.

34 A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo. 25. V. 115.

35 Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis unius æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo. 26. VII. 140.

36 Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: quod ſub tota ſecante, & exteriùs inter punctum, & convexam peripheriam aſſumptâ comprehenditur, rectangulum æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato. 27. VII. 140.

37 Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat, ſit autem, quod ſub totâ ſecante, & exteriùs inter punctum, & convexam peripheriam aſſumptâ comprehenditur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato, incidens ipſa circulum tanget. ex 27. VII. 140.

LI-

LIBER IV.

1 IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit major. *

2 In dato circulo, triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum. 19. V. 112.

3 Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum 21. V. 113.

4 In dato triangulo circulum inſcribere. *

5 Circa datum triangulum circulum deſcribere. *

6 In dato circulo quadratum deſcribere. *

7 Circa datum circulum quadratum deſcribere. *

8 In dato quadrato circulum inſcribere. *

9 Circa datum quadratum circulum deſcribere. *

10 Iſoſceles triangulum conſtituere, quod habeat utrumque eorum, qui ad baſim ſunt, angulorum, duplum reliqui. *

11 In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere. *

12 Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. *

13 In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribere. *

14 Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere. *

15 In dato circulo hexagonum, & æquilaterum, & æquiangulum inſcribere. ex 20. V. 112.

16 In dato circulo, quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. *

LIBER V.

1 SI ſint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquè multiplices, quàm multiplex eſt unius una magnitudo, tam multiplices erunt, & omnes omnium. 9. I. 44.

2 Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ, fuerit autem, & quinta ſecundæ æquè multiplex, atque ſexta quartæ, erit & compoſita prima cum quintâ, ſecundæ æquè multiplex, atque tertia cum ſextâ quartæ. 10. I. 46.

3 Si ſit prima ſecundæ æquè multiplex, atque tertia quartæ, ſumantur autem æquè multiplices primæ, & tertiæ, erit ex æquo ſumptarum utraque utriuſque æquè multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ. 1. I. 40.

4 Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam, etiam æquè multiplices primæ, & tertiæ ad æquè multiplices ſecundæ, & quartæ juxta quamvis multiplicationem eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ità ſumptæ fuerint. ex axiom. 13. I. 39.

5 Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atque ablata ablatæ, etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit ut tota totius. 11. I. 46.

6 Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æqué multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æquè multiplices, & reliquæ

liquæ eiſdem, aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices. 10. I. 46.

7 Æquales ad eandem eandem habent rationem, & eadem ad æquales. axiom. 1. I. 36.

8 Inæqualium magnitudinum major ad eandem majorem rationem habet, quàm minor: & eadem ad minorem majorem rationem habet, quàm ad majorem. ax. 3. I. 37.

9 Quæ ad eandem eandem habent rationem æquales ſunt inter ſe: & ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque ſunt inter ſe æquales. ax. 2. I. 36.

10 Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major eſt; ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor eſt. axiom. 4. I. 37.

11 Quæ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. axiom. 9. I. 38.

12 Si ſint magnitudines quotcumque proportionales, quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. 9. I. 44.

13 Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam, tertia verò ad quartam majorem rationem habuerit, quàm quinta ad ſextam, prima quoque ad ſecundam majorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam. ax. 10. I. 38.

14 Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quâm tertia ad quartam, prima verò quàm tertia major fuerit, erit & ſecunda major quàm quarta. Quòd ſi prima fuerit æqua-

qualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: ſi verò minor, & minor erit. 5. I. 42.

15 Partes cum pariter multiplicibus in eâdem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur. ax. 15. I. 39.

16 Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt. 5. I. 42.

17 Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diviſæ proportionales erunt. 7. I. 43.

18 Si diviſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt. 8. I. 44.

19 Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum, & reliquum ad reliquum ut totum ad totum ſe habebit. 11. I. 42.

20 Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eâdem ratione ſumantur, ex æquo autem prima quàm tertia major fuerit, erit & quarta, quàm ſexta major. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit ex. 1. I. 40.

21 Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio, ex æquo autem prima, quàm tertia major fuerit, erit & quarta quàm ſexta major: quòd ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit. 2. I. 40.

22 Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ra-

ratione ſumantur, & ex æqualitate in eadem ratione erunt. 1. I. 40.

23 Si ſint tres magnitudines, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 2. I. 40.

24 Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quàm ſexta ad quartam, etiam compoſita prima cum quintâ ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſextâ ad quartam. 10. I. 46.

25 Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima, & minima reliquis duabus majores erunt. 12 I. 47.

LIBER VI.

1 Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe ut baſes. 1. 3. VI. 118.

2 Si ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones adjuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela. 19. 20. VI. 125.

3 Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſim, baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et

Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera, recta linea, quæ à vertice ad ſectionem producitur, ea bifariam ſecat trianguli ipſius angulum. *

4 Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. 1. VII. 129.

5 Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur. ex 1. & 5. VII. 129. 131.

6 Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt triangula, æqualeſque habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur. 5. VII. 131.

7 Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò ſimul utrumque aut minorem, aut non minorem recto, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera. *

8 Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta ſit, quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt. 28.VII. 141.

9 A datâ rectâ lineâ imperatam partem auferre. 22. VI. 126.

10 Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, ut data altera recta ſecta fuerit. 21. VI. 125.

11 Dua-

11 Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem adinvenire. 23. VI. 126.

12 Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem adinvenire. 24. VI. 126.

13 Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem adinvenire. 31. VII. 142.

14 Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 9. 10. VI. 121.

15 Æqualium, & unum angulum uni æqualem habentium triangulorum reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 11. VI. 121.

16 Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenditur, rectangulum æquale eſt ei, quod ſub mediis comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub mediis continetur, rectangulo, illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. 12. VI. 122.

17 Si tres rectæ lineæ ſint proportionales, quod ſub extremis comprehenditur, rectangulum æquale eſt ei, quod a mediâ deſcribitur, quadrato; & ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod a mediâ deſcribitur, quadrato, illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. 13. VI. 122.

18 A

18 A datâ recta linea dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere. ex 22. III. & 24. VI. 188. 126.

19 Similia triangula inter ſe ſunt in duplicatâ ratione laterum homologorum. 6. VII. 131.

20 Similia poligona in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et poligona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus. 7. VII. 132.

21 Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. def. 2. VII. 129.

22 Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & ab eis rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta proportionalia erunt. Et ſi a rectis lineis ſimilia, ſimiliterque deſcripta rectilinea proportionalia fuerint, ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt. 9. VII. 134.

23 Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur. ex 12. VI. 122.

24 In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia. 3. VII. 130.

25 Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere. *

26 Si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, & ſimile toti, & ſimiliter poſitum communem cum eo habens angulum, hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit. 4. VII. 131.

27 Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus,

T ſimi-

ſimiliterque poſitis ei, quod a dimidia deſcribitur, maximum id eſt, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum, ſimile exiſtens defectui. *

28 Ad datam lineam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figurâ parallelogrammâ, quæ ſimilis ſit alteri rectilineo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non majus eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, cùm ſimiles ſint defectus, & ejus, quod a dimidiâ deſcribitur, & ejus, cui ſimile eſſe debet. *

29 Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato. *

30 Propoſitam rectam lineam terminatam, extremâ, ac mediâ ratione ſecare. 43. VII. 147.

31 In rectangulis triangulis figura quævis a latere rectum angulum ſubtendente deſcripta æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ a lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. 32. VII. 142.

32 Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundùm unum angulum compoſita fuerint, ita ut homologa eorum latera ſint etiam parallela, tunc reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperiuntur. *

33 In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum ipſis peripheriis, in quibus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad peripherias conſtituti illi inſiſtant peripheriis. Inſuper verò

verò, & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt. 20. VII. 138.

LIBER VII. VIII. IX.

PRimus illorum Propoſitionibus XLI. alter verò XXVII. ultimus denique XXXVI. plurimas Numerorum proprietates complectitur; quarum plures in Libro I. & II. VI. harum Inſtitutionum continentur, aliæ inutiles omnino videntur, aliæ denique ad Elementa ſpectare non poſſunt; unde ſupervacaneum & illarum demonſtrationes ſuperiùs exponere, & illarum ſeriem hìc attexere exiſtimamus.

LIBER X.

CEteris omnibus prolixior CXVII. Propoſitionibus varias magnitudinum commenſurabilium, vel incommenſurabilium ſpecies, & proprietates exponit. Ex his ultimam ſolùm Propoſitione XXXV. Lib. VII. pag. 144. demonſtravimus.

LIBER XI.

1 QUædam rectæ lineæ pars in ſubjecto quidem non eſt plano, quædam verò in ſublimi. 1. VIII. 153.

2 Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecent, in uno ſunt plano: atque triangulum omne in uno eſt plano. 1. VIII. 153.

3 Si duo plana ſe mutuò ſecent, communis eorum ſectio eſt recta linea. 3. VIII. 154.

4 Si recta linea rectis duabus lineis ſe mutuò ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. 4. VIII. 154.

5 Si recta linea rectis tribus lineis ſe mutuò tangentibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, illæ tres rectæ in uno ſunt plano. ex 4. VIII. 154.

6 Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos, parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. ex def. 17. VIII. 153. & 3. IV. 94.

7 Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utrâque ſumpta ſint quælibet puncta, illa, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. ex 1. VIII. 153.

8 Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. ex 3. IV. 94. & def. 17. VIII. 153.

9 Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illâ plano, hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. 9. VIII. 157.

10 Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò tangentes ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano, illæ angulos æquales comprehendent. ex 10. VIII. 157.

11 A dato ſublimi puncto in ſubjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. *

12 Dato plano a puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare. *

13 Dato plano a puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad eaſdem partes. ex def. 17. VIII. 153.

14 Ad

14 Ad quæ plana eadem recta linea recta eſt, illa ſunt parallela. 7. VIII. 156.

15 Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò tangentes ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano, parallela ſunt, quæ per illas ducuntur, plana. 6. VIII. 155.

16 Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur, communes illorum ſectiones ſunt parallelæ. 5. VIII. 155.

17 Si duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, in easdem rationes ſecabuntur. ex 5. VIII. 155. & 2. VII. 130.

18 Si recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, illa etiam omnia, quæ per ipſam plana, ad rectos eidem plano angulos erunt. ex def. 17. VIII. 153.

19 Si duo plana ſe mutuò ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit. ex def. 17. VIII. 153.

20 Si angulus ſolidus planus tribus angulis contineatur, ex his duo quilibet utut aſſumpti tertio ſunt majores. *

21 Solidus omnis angulus minoribus continetur, quàm rectis quatuor angulis planis. *

22 Si plani tres anguli æqualibus rectis contineantur lineis, quorum duo ut libet aſſumpti tertio ſint majores, triangulum conſtitui poteſt ex lineis æquales illas rectas conjungentibus. *

23 Ex planis tribus angulis, quorum duo ut libet aſſumpti tertio ſint majores, ſolidum angulum conſtituere. Decet autem illos tres angulos rectis quatuor eſſe minores. *

24 Si ſolidum parallelis planis contineatur, adverſa illius plana, & æqualia ſunt, & parallelogramma. ex 12. VIII. 158.
25 Si ſolidum parallelis planis contentum plano ſecetur adverſis planis parallelo, erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. 11. IX. 181.
26 Ad datam rectam lineam, ejuſque punctum, angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem. *
27 A datâ rectâ dato ſolido parallelis planis comprehenſo ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelis planis contentum deſcribere. *
28 Si ſolidum parallelis planis comprehenſum ducto per adverſorum planorum diagonio plano ſectum ſit, illud ſolidum ab hoc plano bifariam ſecabitur. ex 12. VIII. 158.
29 Solida parallelis planis comprehenſa, quæ ſuper eandem baſim, & in eadem ſunt altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis, illa ſunt inter ſe æqualia. ex 11. IX. 181.
30 Solida parallelis planis circumſcripta, quæ ſuper eandem baſim, & in eadem ſunt altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem reperiuntur rectis lineis, illa ſunt inter ſe æqualia. ex 11. IX. 181.
31 Solida parallelis planis circumſcripta, quæ in eadem ſunt altitudine, æqualia ſunt inter ſe. ex 12. IX. 181.
32 Solida parallelis planis circumſcripta, quæ ejuſdem ſunt altitudinis, eam habent inter ſe rationem, quam baſes. 11. IX. 181.

33 Similia ſolida parallelis planis circumſcripta habent inter ſe rationem homologorum laterunt triplicatam. 31. IX. 190.

34 Æqualium ſolidorum parallelis planis contentorum baſes cum altitudinibus reciprocantur. Et ſolida parallelis planis contenta, quorum baſes cum altitudinibus reciprocantur, illa ſunt æqualia. 17. IX. 182.

35 Si duo plani ſint anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineant æquales, utrumque utrique, in ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta ſint puncta, & ab his plana, in quibus conſiſtunt anguli primùm poſiti, ductæ ſint perpendiculares, ab earum verò punctis, quæ in planis ſignata fuerunt, ad angulos primùm poſitos adjunctæ ſint rectæ lineæ, hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent. *

36 Si rectæ tres lineæ ſint proportionales, quod ex his tribus fit, ſolidum parallelis planis contentum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelis planis comprehenſo, quod æquilaterum quidem ſit, ſed antedicto æquiangulum. ex 29. IX. 189.

37 Si rectæ quatuor lineæ ſint proportionales, illa quoque ſolida parallelis planis contenta, quæ ab ipſis lineis, & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelis planis comprehenſa, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, ſint proportionalia, illæ quoque rectæ lineæ proportionales erunt. ex 31. IX. 190.

38 Si planum ad planum rectum ſit, & a quo-

dam puncto eorum, quæ in uno ſunt, planorum perpendicularis ad alterum ducta ſit, illa, quæ ducitur perpendicularis, in communem cadet planorum ſectionem. ex def. 17. VIII. 153.
39 Si in ſolido parallelis planis circumſcripto adverſorum planorum lateribus biſariam ſectis educta ſint per ſectiones plana, communis illa planorum ſectio, & ſolidi parallelis planis circumſcripti diameter ſe mutuò biſariam ſecant. ex 1. VII. & 12. VIII. 129. 158.
40 Si duo ſint æqualis altitudinis priſmata, quorum hoc quidem baſim habeat parallelogrammum, illud verò triangulum, ſit autem parallelogrammum trianguli duplum, illa priſmata erunt æqualia. ex 11. IX. 181.

LIBER XII.

1 SImilia, quæ ſunt in circulis, poligona rationem habent inter ſe quam deſcripta a diametris quadrata. 10. VII. 134.
2 Circuli eam inter ſe rationem habent, quam deſcripta a diametris quadrata. 11. VII. 135.
3 Omnis pyramis trigonam habens baſim in duas dividetur pyramides non tantùm æquales, & ſimiles inter ſe, ſed toti etiam pyramidi ſimiles, quarum trigonæ ſunt baſes, atque in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata dimidio pyramidis totius ſunt majora. *
4 Si duæ ejuſdem altitudinis pyramides trigonas habeant baſes, ſit autem illarum utraque diviſa, & in duas pyramides inter ſe æquales, totique ſimiles, & in duo priſmata æqualia,

lia, ac eodem modo dividatur utraque pyramidum, quæ ex ſuperiore diviſione natæ ſunt, idque perpetuò fiat, quemadmodum ſe habet unius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia, quæ in una pyramide priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide priſmata multitudine æqualia. *

5 Pyramides ejuſdem altitudinis, quarum trigonæ ſunt baſes, eam inter ſe rationem habent, quam ipſæ baſes. 4. IX. 178.

6 Pyramides ejuſdem alitudinis, quarum poligonæ ſunt baſes, eam inter ſe rationem habent, quam ipſæ baſes. 4. IX. 178.

7 Omne priſma trigonam habens baſim dividitur in tres pyramides inter ſe æquales, quarum trigonæ ſunt baſes. 8. IX. 179.

8 Similes pyramides, quæ trigonas habent baſes, in triplicatâ ſunt homologorum laterum ratione. 32. IX. 191.

9 Æqualium pyramidum, & trigonas baſes habentium reciprocantur baſes cum altitudinibus. Et quarum pyramidum trigonas baſes habentium reciprocantur baſes cum altitudinibus, illæ ſunt æquales. 18. IX. 183.

10 Omnis conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo cono baſim habentis, & altitudinem æqualem. 10. IX. 180.

11 Coni, & cylindri ejuſdem altitudinis eam inter ſe rationem habent, quam baſes. 6. 13. IX. 179. 181.

12 Similes coni, & cylindri triplicatam habent inter ſe rationem diametrorum, quæ ſunt in baſibus. 33. IX. 191.

13 Si cylindrus plano ſectus ſit adverſis planis pa-

parallelo, erit quemadmodum cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 3. IX. 177.

14 Coni, & cylindri, qui in æqualibus ſunt baſibus, eam habent inter ſe rationem, quam altitudines. 16. IX. 182.

15 Æqualium conorum, & cylindorum baſes cum altitudinibus reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum baſes cum altitudinibus reciprocantur, illi ſunt æquales 18. IX. 183.

16 Duobus circulis circum idem centrum conſiſtentibus, in majori circulo poligonum æqualium, pariumque laterum inſcribere, quod minorem circulum non tangat. *

17 Duabus ſphæris circum idem centrum conſiſtentibus, in majori ſphæra ſolidum poliedrum inſcribere, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangat. *

18 Sphæræ inter ſe rationem habent ſuarum diametrorum triplicatam. 27. IX. 192.

LIBER XIII. XIV. XV.

Corporum regularium, Tetrahedri nimirum, quod 4., Octahedri, quod 8., Icoſahedri, quod 21. triangulis æquilateris, Cubi, vel Hexahedri, quod 6. quadratis, Dodecahedri denique, quod 12. pentagonis continetur, latera, dimenſionem, illorumque in ſphærâ, vel in ipſorum alterutro inſcriptionem XVIII. XXXII. XXI. Propoſitionibus complectuntur.

Finis Inſtitutionum Mathematicarum.

I L-

ILLUSTRIUM VIRORUM JUDICIA

QUIBUS

MATHEMATICÆ FACULTATIS PRÆSTANTIA, ATQUE IN DISCIPLINIS ALIIS ACQUIRENDIS UTILITAS DEMONSTRATUR.

PROCLUS

COMMENT. IN EUCL. LIB. I. CAP. 8.

Q*Uod ad Philoſophiam* MATHEMATICA *præcipuam afferat utilitatem perſpicuum eſt. Opus eſt autem, ut de ſingulis quoque* Diſciplinis *mentionem faciamus. Ac Theologiæ quidem intelligentes apprehenſiones preparat; quæcumque enim imperfectis crutatu difficilia, arduaque ad veram divinorum cognitionem videntur, hæc* MATHEMATICES *rationes credibilia, & manifeſta, & certa per imagines oſtendunt.*

ALCINOUS

DE DOCTR. PLAT. CAP. 7.

MATHEMATICORUM *conſideratio præludium quoddam eſt ad Divinorum contemplationem.* PLA-

Digitized by Google

DE REP. VII.

GEOMETRIA *ejus, quod eſt ſemper, cognitio eſt. Attollet igitur ad Veritatem animum, atque ita ad philoſophandum præparabit cogitationem, ut ad ſupera convertamus, quæ nunc, contra quàm decet, ad inferiora dejicimus. Quammaximè igitur præcipiendum eſt, ut qui præclariſſimam hanc habitant Civitatem, nullo modo* GEOMETRIAM *ſpernant; nam, & quæ præter ipſius propoſitum quodammodo eſſe videntur, haud exigua ſunt: quin etiam ſcimus ad Diſciplinas omnes faciliùs perdiſcendas intereſſe omnino attigeritne Geometriam aliquis, an non.*

HIPPOCRATES

AD THESSALUM FILIUM.

GEOMETRIÆ, & ARITHMETICES *cognitioni ſtudium adhibeto, mi Fili. Neque enim ſolùm vitam tuam glorioſam, & ad multa in rebus humanis utilem, verùm etiam mentem acutiorem, & longè ſplendidiorem ad fructum eorum omnium, quæ in Arte Medicâ uſui ſunt, conſequendum reddet. Quamquam quidem* GEOMETRIÆ *cognitio,*

tio,

tio, cùm multas, & varias formas habeat; & omnia cum demonſtratione ad exitum perducat, tum ad oſſium poſitus, & articulos ſuis ſedibus emotos, tum etiam ad reliquam membrorum compoſitionem, utilis futura eſt. Nam ad horum affectuum variam cognitionem faciliùs perveniet, tum etiam articulorum repoſitione, tum oſſium contritorum reſectione, & coaptatione, & ſubſtractione, reliquaque curatione ductus, qui locum, & os quale ſit ex eo emotum cognoverit. Numerorum verò ſeries, tum ad ambitus, tum ad eas mutationes, quæ præter rationem in febribus fiunt, & ad judicandos ægros, & ad morborum ſecuritatem ſatis futura eſt. Præclarum enim eſt id Tibi in re medicâ ſubminiſtrari, quod intenſionis, ac remiſſionis partium, quæ ex parte inæquales ſunt, facilem Tibi abſque errore notitiam præbeat. Quapropter ad hujus experientiæ facultatem valdè contendito. Vale.

PROCLUS

LIB. I. CAP. 8.

VErumtamen *quanta ceteris quoque Scientiis, atque Artibus a* MATHEMATICA *Scientiâ prodeat utilitas, diſcemus*

mus utique conſiderantes, quod contemplantibus quidem, ut Rhetoricæ, atque bujuſcemodi omnibus, quæcumque in ſermone poſitæ ſunt, perfectionem, ordinemque addit.

QUINTILIANUS

Instit. Orator. I. Cap. 10.

IN Geometria partem fatentur eſſe utilem teneris ætatibus: agitari namque animos, atque acui ingenia, & celeritatem percipiendi venire inde concedunt: ſed prodeſſe eam, non ut ceteras Artes, cum perceptæ ſint, ſed cum diſcatur, exiſtimant. Id vulgaris opinio eſt, nec ſinè cauſsâ ſummi Viri etiam impenſam huic Scientiæ operam dederunt. Nam cum ſit Geometria diviſa in numeros, atque formas, &c.

PLATO

In Philæbo.

SI quis ab omnibus Artibus ſegregaret numerandi, dimetiendique, & ponderandi peritiam, vile quiddam eſſet, quod uniuſcujuſque reſtaret.

Idem

IDEM DE REP. VII.

CErnis igitur hanc revera peritiam hujus Diſciplinæ nobis neceſſariam eſſe; quandoquidem, ut apparet, animum ad hoc inducit, ut ipſe intelligentiâ utatur ad Veritatem ipſam percipiendam; atque homines naturâ Arithmetici ad omnes doctrinas, ut ita dixerim, acuti videntur; quin etiam, ſi qui ingenio tardiores huic ſe ſtudio dederint, ſi nullam utilitatem aliam ſuſceperint, tamen hoc aſſequentur, ut acutiores, quàm antea, ſint.

PLUTARCHUS

SYMP. VII. QUÆST. 2.

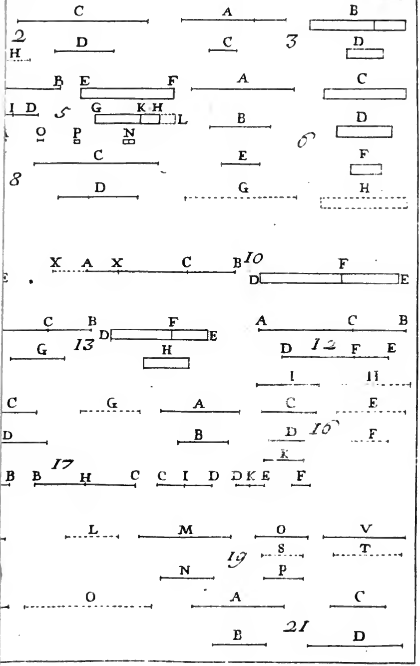
CUm in omnibus Mathematis, tanquam planis, & lævibus ſpeculis intelligibilium veritatis veſtigia, & imagines appareant, maximè Geometria, quam Philo reliquarum Principem, & Metropolim vocat, excitat, & convertit intellectum veluti repurgatum, & paullatim a ſenſu liberatum.

BOETHIUS

ARITHM. LIB. I. CAP. 1.

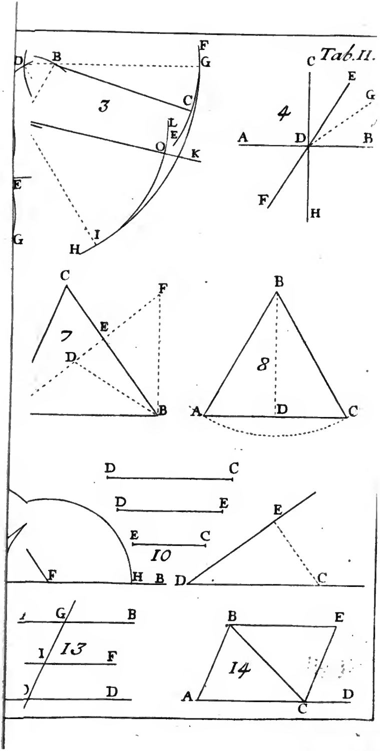
GEOMETRIA, MUSICA, & ASTRONOMIA, *ſi careat* Veritatis *Inquiſitor, Verum invenire non poterit, ac ſinè hac quidem ſpeculatione Veritatis nulli rectè ſapiendum eſt. Eſt enim Sapientia earum rerum, quæ veræ ſunt, cognitio, & integra comprehenſio. Quod hæc qui ſpernit, ideſt, has ſemitas Sapientiæ, ei denuncio non rectè philoſophandum.*

A01 1453289

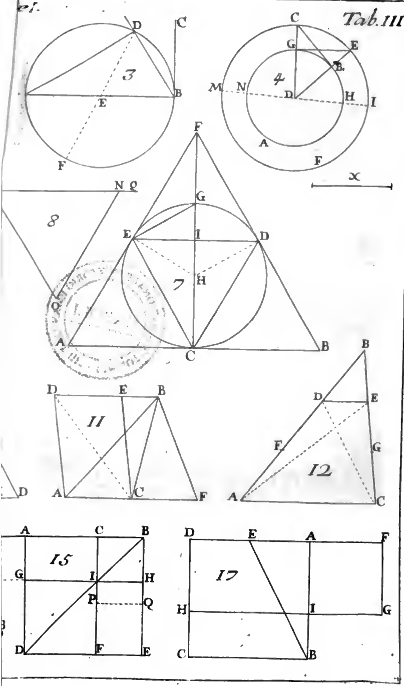


Digitized by Google

Tab. II.

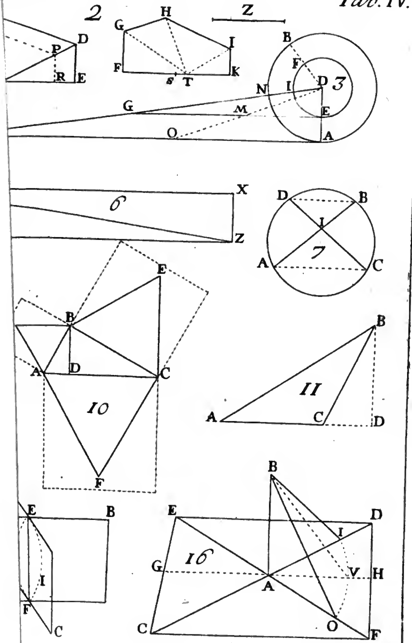


Tab. III

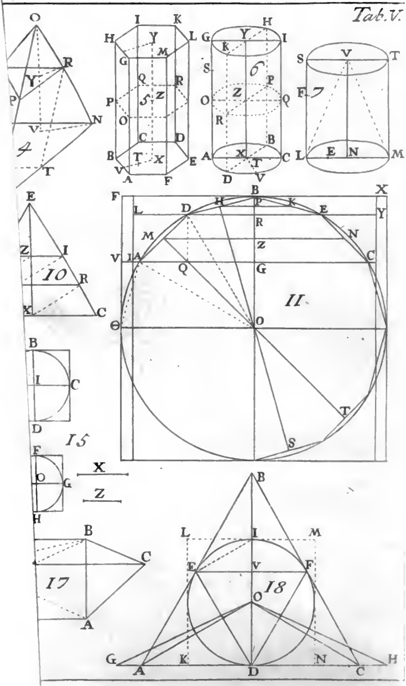


3
D C B E F
4
C G E B M N D H I A F X
8
N Q O
7
F G E I D H A C B
11
D E B A C F
12
B D E F G A C
15
A C B G I H P Q D F E
17
D E A F H I G C B

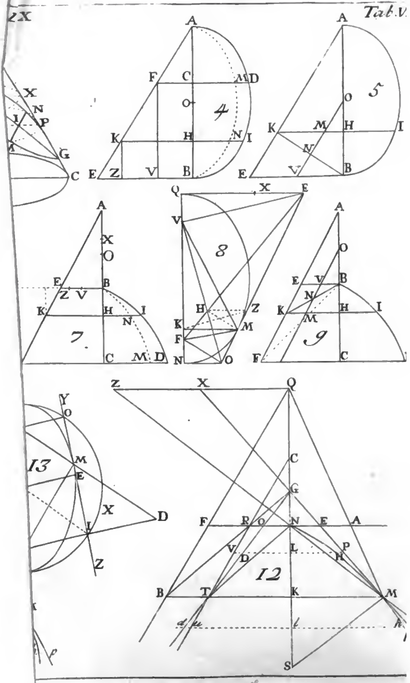
Tab. IV.

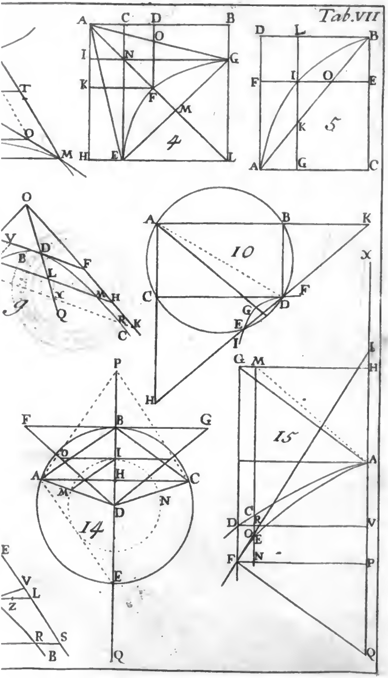


Digitized by Google


Tab. V.
4
5
6
7
10
11
15
17
18
X
Z

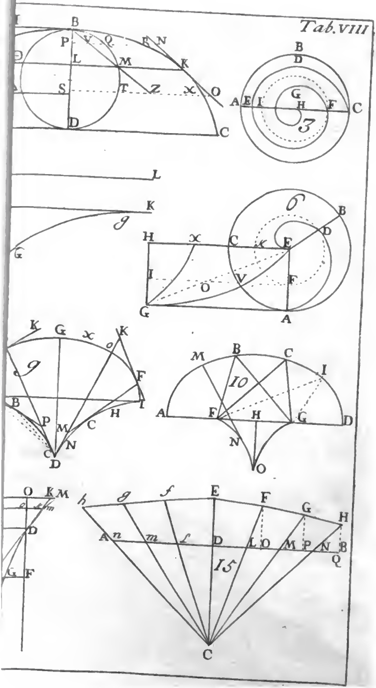
Digitized by Google


Tab.V.
4
5
7
8
9
12
13


Tab.VII
4
5
9
10
14
15

Digitized by Google

Tab. VIII



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

by Google